Mathematische Methoden der Physik I / EMTP III

(Prof. Mikko Laine; E6-119; Sprechstunde Mi 10-12)

* Webseite: www.physik.uni-bielefeld.de/~laine/mmpI/

  ⇒ Zeitplan, Skript, Übungsblätter, ...

* Literatur: Referenzen zu Arfken & Weber,
  Mathematical Methods for Physicists, 6th edition
  (im Semesterapparat)

* Inhalt:
  - Vektorräume
  - Funktionenräume
  - Komplexe Funktionen
    * Klausur 07.01.2012

  } „EMTP III" (5+1 LP)

  - Komplexe Integration
    * Abgegebene Blätter 10-13

  } „MMP I" (6+2 LP)

* Übungen: Austeilung: in den Gruppen (außer erster Woche)

  Übungsschein: 50% angekreuzt &
  mehrere Aufgaben in den Übungen vorgerechnet

* Gruppen:
  Di 8 - 10 (D01-249)
  Di 16 - 18 (D01-249)
  Mi 12 - 14 (D6-135)

  } starten am 18./19.10.2011

* ekVV: unbedingt registrieren!

* Fragen: sehr willkommen!

1. Vektorräume

1.1 Grundbegriffe [Arfken 1.1-2]

Raum $\mathbb{R}^n$: Menge aller n-Tupel $\left\{ \vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$.

Reeller Vektorraum: $\mathbb{R}^n$ mit folgender zusätzlicher Struktur:

- „Addition": $\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$
- „Skalarmultiplikation": $\lambda \vec{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- „Nullvektor": $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \;\forall \vec{x}$; $0 \cdot \vec{x} = \vec{0} \;\forall \vec{x}$
- „Inverse": $-\vec{x} := \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{x} + -\vec{x} =: \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \;\forall \vec{x}$

Lineare Abbildung: Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit folgenden Eigenschaften:

- „additiv": $A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y}$
- „homogen": $A(\lambda \vec{x}) = \lambda A(\vec{x}) \quad \forall \lambda, \vec{x}$

Es folgt u.a. $A(\vec{0}) = A(0 \cdot \vec{x}) = 0\, A(\vec{x}) = \vec{0}$;

$A(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = A(\lambda \vec{x}) + A(\mu \vec{y}) = \lambda A(\vec{x}) + \mu A(\vec{y})$.

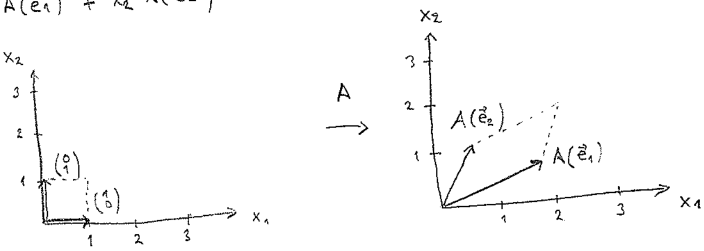
Einheitsvektoren: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ usw.; $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Stelle

Beispiel: $n = m = 2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$

$$A(\vec{x}) = x_1 A(\vec{e}_1) + x_2 A(\vec{e}_2)$$

Graphisch:



Matrizenschreibweise: Schreibe die Vektoren $\boxed{\vec{a}_i := A(\vec{e}_i)}$ „in der kartesischen Basis" als

$$\vec{a}_i =: \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

Index rechts!

Es folgt:

$$A(\vec{x}) = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix} =: \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

„Tabelle"; m×n-Matrix;
m Zeilen;
n Spalten.

Notationen:

- $A\vec{x} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (statt $A(\vec{x})$)
- $(a_{ij}) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (statt A)
- $\vec{y} = A\vec{x} \Leftrightarrow y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j =: a_{ij} x_j$ (Summenkonvention)

Matrizenaddition:

Sind A und B zwei lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, so ist auch

$$A + B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$(A+B)(\vec{x}) := A(\vec{x}) + B(\vec{x})$$

linear; Einheitsvektoren benehmen sich als $\vec{e}_i \mapsto A(\vec{e}_i) + B(\vec{e}_i)$, und so hat die Tabelle die Form

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}+b_{ij}) .$$

Matrizenmultiplikation:

Betrachte die „Komposition" bzw. „Hintereinanderausführung" bzw. „Verkettung" zweier linearer Abbildungen:

$$A \circ B : \mathbb{R}^n \xrightarrow{B} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} \mathbb{R}^p$$
$$(A \circ B)(\vec{x}) := A(B(\vec{x})) .$$

(Normalerweise wird die einfachere Notation $AB := A \circ B$ benutzt.)

Dieses „Produkt" ist auch eine lineare Abbildung.

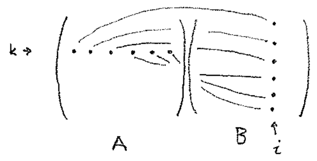
In Tabellenform:

$$A(\vec{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}, \text{ d.h. } A(\vec{e}_j) \overset{\text{Summenkonvention!}}{=} a_{kj}\vec{e}_k \; ; \; B(\vec{e}_i) = b_{ji}\vec{e}_j$$

$$\Rightarrow (A \circ B)(\vec{e}_i) = A(B(\vec{e}_i)) = A(b_{ji}\vec{e}_j) = b_{ji} A(\vec{e}_j) = b_{ji} a_{kj} \vec{e}_k =: c_{ki} \vec{e}_k ,$$

d.h. $AB = C = (c_{ki})$ mit $\boxed{c_{ki} = \sum_j a_{kj} b_{ji}}$.

Graphisch:

$c_{ki} =$ 

Einheitsmatrix:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}) \; ; \; \delta_{ij} = \text{Kronecker-Symbol}$$

$$\Rightarrow (AE)_{ki} = a_{kj}\delta_{ji} = a_{ki} , \text{ d.h. } AE = A ,$$

und auch $EA = A \quad \forall A$.

Unterverktorräume des $\mathbb{R}^n$: „UVR"

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt Unterverktorraum von $\mathbb{R}^n$, wenn $\vec{0} \in U$ ist, und wenn $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ auch $\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \in U$ gilt.
(Es folgt: $-\vec{v} \in U$; ein UVR ist Vektorraum.)

Lineare Hülle:

Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ beliebige Vektoren, so bezeichnet

$$\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r) := \{\lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{v}_r \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

deren „lineare Hülle", die Menge der Linearkombinationen der $\vec{v}_i$ bzw. die von den $\vec{v}_i$ aufgespannte Menge.

- Lineare Hülle ist immer ein UVR!
- Beispiele: $\mathrm{Lin}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$; $\mathrm{Lin}(\vec{e}_1) =$ x-Achse; $\mathrm{Lin}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) =$ (x,y)-Ebene; $\mathrm{Lin}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \mathbb{R}^3$ . .

Bild einer Abbildung:

$$\text{Bild } A := A(\mathbb{R}^n) := \{A(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

- Bild ist ein UVR: $\lambda A(\vec{x}) + \mu A(\vec{y}) = A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})$.
- Beispiel: $A(\vec{x}) := (\vec{e}_1 \cdot \vec{x})\vec{e}_1 \Rightarrow$ Bild = x-Achse.

Kern einer Abbildung:

$$\text{Kern } A := A^{-1}(\vec{0}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A(\vec{x}) = \vec{0}\}.$$

- Kern ist ein UVR: $A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda \underbrace{A(\vec{x})}_{\vec{0}} + \mu \underbrace{A(\vec{y})}_{\vec{0}}$.
- Beispiel: $A(\vec{x}) := (\vec{e}_1 \cdot \vec{x})\vec{e}_1 \Rightarrow$ Kern = (y,z)-Ebene.

Kombinationen von UVRs:

- Durchschnitt: $U \cap V := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \in U \wedge \vec{x} \in V\}$
- Summe: $U + V := \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in U, \vec{y} \in V\}$
- Direkte Summe: $U + V =: U \oplus V$ falls $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

(Das besondere ist, dass jeder $\vec{x} \in U \oplus V$ in genau einer Weise als Summe $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ mit $\vec{u} \in U$ und $\vec{v} \in V$ zu schreiben ist.)

Alle sind UVRe!

— o —