

[Diskutiert in den Tutorien am 31.01./01.02.2012.]

Aufgabe 1: Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die Integrale (6 Punkte)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos x}{(x-a)^2 + b^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{(x-a)^2 + b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

[Hinweis: Drücken Sie \cos und \sin als Real- und Imaginärteil von e^{ix} aus.]

Aufgabe 2: Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\ln(x-i)}{(x+i)^2},$$

indem Sie die Kontur so umformen, dass sie längs des Schlitzes läuft (6 Punkte). [Antwort: π .]

Aufgabe 3:

- (a) Zeigen Sie, dass wenn eine Funktion $f(x)$ reell ist, dann besitzt ihre Fourier-Transformierte, $\tilde{f}(k)$, die Eigenschaft $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}^*(k)$ (2 Punkte).
- (b) Betrachtet werden Kramers-Kronig-Relationen für die Funktion $\tilde{f}(k) =: u(k) + iv(k)$, mit Symmetrie-Eigenschaften wie im Punkt (a). Verifizieren Sie die folgenden asymptotischen Verhalten für $k_0 \rightarrow \infty$ (4 Punkte):

$$u(k_0) \sim -\frac{2}{\pi k_0^2} \int_0^{\infty} dk kv(k),$$

$$v(k_0) \sim \frac{2}{\pi k_0} \int_0^{\infty} dk u(k).$$

Aufgabe 4:

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\infty} dx \cos(x^2) = \int_0^{\infty} dx \sin(x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

indem Sie entlang der Kurve $\partial S_{\pi/4}(R)$ integrieren, wobei $S_{\pi/4}(R)$ den Sektor $S_{\pi/4}(R) = \{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid 0 < r < R, 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}\}$ bezeichnet (3 Punkte).

- (b) Bekannterweise gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a}$, $a > 0$. Verifizieren Sie anhand der Ergebnisse aus Punkt (a), dass der Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2}$ als analytische Fortsetzung der Formel aus dem Reellen interpretiert werden kann (3 Punkte).

Um Punkte aus Übungen 10-13 zu erhalten, muß die Bearbeitung am Montag von 9 – 12 Uhr im zugehörigen Kasten im Raum E6-102 abgegeben werden. Bei 50% der Punkte erhält man die 2 zusätzlichen Leistungspunkte der MMP I, mit der Note der Klausur. Bei mehr als 50% der Punkte kann die Klausurnote sogar erhöht werden (auf noch zu bestimmender Weise).