Übungen zu MMP I	**Blatt Nr. 12**	17.01.2012

[Diskutiert in den Tutorien am 24./25.01.2012.]

Aufgabe 1: Die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ seien analytisch auf einem Gebiet $G \in \mathbb{C}$, und γ sei eine Kurve ganz im G, die den Punkt $z_0 \in G$ umläuft. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt (6 Punkte):

$$\oint_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{f'(z)}{z - z_0} = \oint_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, .$$

[Hinweis: Eine Möglichkeit ist, den Cauchyschen Integralsatz zu benutzen, um die Kontur so nah an z_0 zu bringen, dass Reihen-Darstellungen konvergieren.]

Aufgabe 2: Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral (6 Punkte)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x \, x^2}{1 + x^4} \, .$$

[Antwort: $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.]

Aufgabe 3: Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral (6 Punkte)

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{(a + \cos\theta)^2} \, .$$

[Antwort: $\pi a/(a^2 - 1)^{3/2}$, $a > 1$.]

Aufgabe 4: Verifizieren Sie die Gültigkeit der formalen Beziehung

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i0^+} \, ,$$

wobei $\theta(t)$ die Stufenfunktion bezeichnet und 0^+ eine kleine positive Zahl ist (6 Punkte). [Hinweis: Es lohnt sich, den Hilfsweg in der Halbebene verlaufen zu lassen, in der er keinen Beitrag liefert.]

Um Punkte aus Übungen 10-13 zu erhalten, muß die Bearbeitung am Montag von 9 – 12 Uhr im zugehörigen Kasten im Raum E6-102 abgegeben werden. Bei 50% der Punkte erhält man die 2 zusätzlichen Leistungspunkte der MMP I, mit der Note der Klausur. Bei mehr als 50% der Punkte kann die Klausurnote sogar erhöht werden (auf noch zu bestimmender Weise).