Übungen zu EMTP III / MMP I	**Blatt Nr. 10**	20.12.2011

[Diskutiert in den Tutorien am 10./11.01.2012.]

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt (3 Punkte).

(b) Drücken Sie die Umkehrfunktionen von $\cosh z$ und $\sin z$ durch den Hauptzweig des Logarithmus aus, d.h. durch die Funktion ln (3 Punkte).

Aufgabe 2:

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihe von $\ln(1+z)$ um $z = 0$ (2 Punkte). [$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$.]

(b) Bestimmen Sie die Potenzreihen von $\ln(z)$ um $z = +1$ und um $z = +i$ (2 Punkte).

(c) Skizzieren Sie die Kovergenzbereiche aller Reihen in der komplexen Ebene (2 Punkte).

Aufgabe 3: Betrachtet wird $Q_0(z) := \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}$, mit Schlitz zwischen $z = -1$ und $z = +1$.

(a) Bestimmen Sie $\frac{1}{2}[Q_0(x+i0^+) - Q_0(x-i0^+)]$, $x \in \mathbb{R}$ (3 Punkte).

(b) Bestimmen Sie ebenfalls $\frac{1}{2}[Q_0(x+i0^+) + Q_0(x-i0^+)]$, $x \in \mathbb{R}$ (3 Punkte).

Aufgabe 4: Betrachtet wird die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(z)$, die für $\mathrm{Re}(z) > 1$ als

$$\zeta(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t\, t^{z-1}}{e^t - 1}$$

definiert werden kann, dabei ist $\Gamma(z) := \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{z-1}e^{-t}$ die Eulersche Gamma-Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass $\zeta(z)$ als $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ dargestellt werden kann (2 Punkte).

(b) Leiten Sie die alternative Darstellung

$$\zeta(z) = \frac{1}{(1-2^{1-z})\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t\, t^{z-1}}{e^t + 1}\,, \quad \mathrm{Re}(z) > 0\,,$$

her (2 Punkte). [Hinweis: $\frac{1}{e^t-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{t/2}-1} - \frac{1}{e^{t/2}+1}\right)$.]

(c) Verifizieren Sie als Limes $z \to 0^+$ das merkwürdige Ergebnis $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ $\left[= „\sum_{n=1}^{\infty}“!\right]$.
Warum gibt es hier keinen Grund zur Sorge? (2 Punkte)

[Hinweis: Es gibt Divergenzen in $\Gamma(z)$ sowie im $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t\, t^{z-1}}{e^t+1}$; beide stammen von kleinen Werten von t; betrachten Sie deshalb den Beitrag des Intervalls $t \in (0, \epsilon)$, $\epsilon \ll 1$.]

Um Punkte aus Übungen 10-13 zu erhalten, muss die Bearbeitung am Montag von 9 – 12 Uhr im zugehörigen Kasten im Raum E6-102 abgegeben werden. Bei 50% der Punkte erhält man die 2 zusätzlichen Leistungspunkte der MMP I, mit der Note der Klausur. Bei mehr als 50% der Punkte kann die Klausurnote sogar erhöht werden (auf noch zu bestimmender Weise).