Übungen zu EMTP III / MMP I	**Blatt Nr. 08**	06.12.2011

[Diskutiert in den Tutorien am 13./14.12.2011.]

Aufgabe 1:

(a) Sei $f_2(x)$ ein beliebiges Polynom zweiten Grades, $f_2(x) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_2 x^2$, $|x| < 1$. Ermitteln Sie eine Darstellung von $f_2(x)$ in der Basis der Legendre-Polynome. [Hinweis: Ihre „Standardnormierung" lautet $P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, mit $P_n(1) = 1$.]

(b) Sei $f_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^k}{k!}$ eine abgebrochene Taylor-Entwicklung um $x = 0$. Zeigen Sie, dass auch diese für $|x| < 1$ eindeutig als Linearkombinationen von Legendre-Polynomen dargestellt werden kann, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$.

Aufgabe 2: Wenn λ_n und v_n Eigenwerte und orthonormierte Eigenfunktionen sind,

$$\mathcal{L} v_n(x) + \lambda_n w(x) v_n(x) = 0 \ ,$$

hilft die Greensche Funktion $G(x; y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n^*(y)}{\lambda_n}$ uns zur Lösung von $\mathcal{L} f(x) + g(x) = 0$ durch

$$f(x) = \int_a^b \mathrm{d}y \, G(x; y) g(y) \ .$$

Interpretieren Sie diese Gleichungen in der Sprache der Matrizen. Welche Matrix entspricht der Greenschen Funktion? Welche Rolle spielt die Bedingung dass es keinen Nulleigenwert gibt?

Aufgabe 3: Die „modifizierte Helmholtz-Gleichung" lautet

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - k^2 \right) f(x) = g(x) \ .$$

(a) Bestimmen Sie die entsprechende Greensche Funktion mit den Randbedingungen

$$\lim_{x \to -\infty} G(x; y) = \lim_{x \to +\infty} G(x; y) = 0 \ .$$

[Antwort: $\frac{1}{2k} \exp(-k|x - y|)$.]

(b) Ermitteln Sie die Lösung $f(x)$ für den Fall $g(x) = \theta(x - a)\theta(b - x)$, $a < b$.

Aufgabe 4: Die Besselsche Differenzialgleichung lautet

$$x^2 J_m''(x) + x J_m'(x) + (x^2 - m^2) J_m(x) = 0 \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Reihendarstellung

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{m+2n}$$

die Differenzialgleichung löst.

(b) Verifizieren Sie auch, dass die Besselsche Differenzialgleichung aus den folgendenen Rekursionsbeziehungen hergeleitet werden kann:

$$\begin{aligned} J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) &= \frac{2m}{x} J_m(x) \ , \\ J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) &= 2 J_m'(x) \ . \end{aligned}$$

[Hinweis: Arfken 11.1]