Übungen zu EMTP III / MMP I	**Blatt Nr. 07**	29.11.2011

[Diskutiert in den Tutorien am 06./07.12.2011.]

Aufgabe 1: Betrachtet wird die Folge

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n, & |x| < \frac{1}{2n} \\ 0, & |x| \geq \frac{1}{2n} \end{cases} .$$

(a) Bestimmen Sie die entsprechenden Fourier-Transformierten, $\tilde{\delta}_n(k)$. [Antwort: $\frac{2n}{k}\sin(\frac{k}{2n})$]

(b) Argumentieren Sie, anhand der Antwort aus (a), dass $\lim_{n\to\infty}\delta_n(x) = \delta(x)$ gilt.

(c) Argumentieren Sie, anhand der Fourier-Rücktransformation, dass die Diracsche Deltafunktion formal auf folgender Weise ausgedrückt werden kann:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty}\delta_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,e^{ikx} .$$

Aufgabe 2: Die Laguerre-Gleichung lautet

$$xf'' + (1-x)f' + nf = 0 , \quad x > 0 , \quad n \in \{0,1,2,...\} .$$

(a) Verifizieren Sie, dass die Polynome aus Aufgabe 6.1(c) diese Gleichung erfüllen.

(b) Zeigen Sie, durch Multiplikation mit e^{-x}, dass der Differenzialoperator in Form eines selbstadjungierten Operators gebracht werden kann, und dass die Gewichtsfunktion dann $w(x) = e^{-x}$ ist, genau wie in Aufgabe 6.1.

Aufgabe 3: Die Legendre-Gleichung lautet

$$(1-x^2)f'' - 2xf' + n(n+1)f = 0 , \quad -1 \leq x \leq 1 , \quad n \in \{0,1,2,...\} .$$

(a) Zeigen Sie, dass $u(x) := x$ und $v(x) := \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ Lösungen der Legendre-Gleichung sind. Welche sind die entsprechenden Eigenwerte?

(b) Ermitteln Sie den Wert von $\langle u|v\rangle = \int_{-1}^{+1}\mathrm{d}x\,u(x)v(x)$.

(c) Warum sind $u(x)$ und $v(x)$ nicht orthogonal zueinander?

Aufgabe 4: Die Funktionen $u_n(x)$, $u_m(x)$ genügen der Sturm-Liouville-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda_n w(x)u_n(x) = 0 ,$$

und seien orthogonal zueinander. (Die entsprechenden Eigenwerte λ_n, λ_m seien ungleich.) Zeigen Sie, dass $u_n'(x)$ und $u_m'(x)$ auch orthogonal zueinander sind, mit $p(x)$ als Gewichtsfunktion, wenn angemessene Randbedingungen erfüllt sind.