

[Diskutiert in den Tutorien am 29./30.11.2011.]

Aufgabe 1: Sei \mathbb{P} der euklidische Vektorraum der reellen Polynome mit dem durch $\langle P|Q \rangle := \int_0^\infty dx e^{-x} P(x) Q(x)$ definierten Skalarprodukt, und $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}$ der Untervektorraum der Polynome vom Grade $\leq n$.

- (a) Zeigen Sie, dass es genau eine Folge $(L_n)_{n \geq 0}$ von Orthogonalpolynomen (d.h. $\langle L_n|L_m \rangle = \delta_{nm}$) vom Grade n gibt, welche $L_n(0) > 0$ erfüllt (Laguerre-Polynome).
- (b) Weshalb ist (L_0, \dots, L_n) eine Basis von \mathbb{P}_n ?
- (c) Berechnen Sie $L_n(x)$ für $n = 0, 1, 2$. [Hinweis: $\int_0^\infty dx e^{-x} x^n = n!$.]

Aufgabe 2: Eine äußerst nützliche wenn auch nicht unbedingt wohldefinierte Formel lautet

$$\frac{1}{x \pm i0^+} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x),$$

wobei \mathcal{P} den Cauchyschen Hauptwert bezeichnet. Ermitteln Sie eine Begründung dieser Formel.

Aufgabe 3: Im Skript (Seite 44) wird eine 2π -periodische Treppenfunktion $\phi(y) := \theta(\pi - y)$, $0 \leq y < 2\pi$ betrachtet, wobei θ die Stufenfunktion bezeichnet. Uns interessiert jetzt der Fall

$$\phi_a(y) := \begin{cases} 1, & y_0 \leq y < y_0 + a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Beträge der Fourier-Koeffizienten, $|\gamma_n|$, unabhängig von y_0 sind.
- (b) Ermitteln Sie γ_n für die Wahl $y_0 = 0$.
- (c) Verifizieren Sie, dass die Fourier-Reihe im quadratischen Mittel gegen ϕ_a konvergiert:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\phi_a\|^2.$$

[Hinweis: $\gamma_0 = \frac{a}{2\pi}$; $|\gamma_n| = \left| \frac{\sin(an/2)}{\pi n} \right|$, $n \neq 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(an)}{n^2} = \frac{a^2}{4} - \frac{a\pi}{2} + \frac{\pi^2}{6}$, $0 < a < 2\pi$.]

Aufgabe 4: Sei

$$t(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Wie müssen die Koeffizienten α_i, β_i bestimmt werden, damit der Abstand von t zu einer Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert als

$$d(f, t) := \|f - t\| := \left(\int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x) - t(x)|^2 \right)^{1/2},$$

minimal wird?