Übungen zu EMTP III / MMP I	**Blatt Nr. 05**	15.11.2011

[Diskutiert in den Tutorien am 22./23.11.2011.]

Aufgabe 1: Die potentielle Energie für drei gekoppelte Teilchen der Masse m (Ozon-Molekül) als Funktion der 1-dimensionalen Auslenkungen x_i aus den Ruhelagen sei

$$V(x_1, x_2, x_3) := \frac{\kappa}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{\kappa}{2}(x_3 - x_2)^2, \ \kappa > 0 \ .$$

(a) Drücken Sie V als quadratische Form aus.

(b) Führen Sie eine Hauptachsentransformation durch.

(c) Suchen Sie nach Lösungen der Form $\vec{x} = \vec{a}\cos(\omega t)$ für die Newtonschen Bewegungsgleichungen $m\ddot{\vec{x}} = -\nabla V$ und bestimmen Sie die Eigenfrequenzen ω und die zugehörigen Auslenkungsmuster $\vec{a}$.

Aufgabe 2: Für den linearen Zusammenhang zwischen Drehimpuls $\vec{L}$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ eines starren Körpers um eine feste Drehachse $\vec{n}$ gilt $\vec{L} = J\vec{\omega}$, dabei ist J der Trägheitstensor. Für ein System von Massepunkten m_α an den Orten $\vec{x}_\alpha$ gilt in einem kartesischen körperfesten Koordinatensystem

$$(J)_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(|\vec{x}_\alpha|^2\delta_{ij} - x_{\alpha i}\, x_{\alpha j}\right) .$$

(a) Berechnen Sie J für ein System von vier Massenpunkten mit $m_1 = m_2 = M, \quad m_3 = m_4 = m, \quad \vec{x}_1 = -\vec{x}_2 = (a, a, 0), \quad \vec{x}_3 = -\vec{x}_4 = (-a, a, 0)$.

(b) Die Spur einer Matrix wird als $\mathrm{Sp}\, J := \sum_{i=1}^n (J)_{ii}$ definiert. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}\, J$ die Summe der Hauptachsenträgheitsmomente ergibt, und ermitteln Sie diese Summe.

Aufgabe 3: Seien

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie, dass eine allgemeine hermitesche 2×2-Matrix als $A = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu \sigma_\mu$ ausgedrückt werden kann, wobei x_μ reelle Zahlen sind.

(b) Unter welchen Umständen ist die hermitesche Matrix aus Punkt (a) auch unitär?

(c) Unter welchen Umständen ist die Matrix $B := x_0\sigma_0 + i\sum_{k=1}^3 x_k\sigma_k$, $x_\mu \in \mathbb{R}$, unitär?

(d) Diagonalisieren Sie die hermiteschen Matrizen σ_1 und σ_2.

Aufgabe 4: Wenn $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ eine Basis von $V := \mathbb{C}^n$ ist, kann ein Vektor $\vec{v} \in V$ „reellifiziert" werden, indem die komplexen Koordinaten z_i als $z_i = \mathrm{Re}\, z_i + i\, \mathrm{Im}\, z_i$ ausgedrückt werden, und $(\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Im}\, z_1, ..., \mathrm{Re}\, z_n, \mathrm{Im}\, z_n)$ als reelle Koordinaten eines Raums $\mathbb{R}^{2n}$ interpretiert werden.

(a) Welche orthogonale 4×4-Matrix entspricht der unitären Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ in einer solchen Reellifizierung?

(b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $U(n) \subset O(2n)$ gilt.