Übungen zu EMTP III / MMP I	**Blatt Nr. 04**	08.11.2011

[Diskutiert in den Tutorien am 15./16.11.2011.]

Aufgabe 1:

(a) Weisen Sie mit Hilfe einer Multplikationstabelle nach, dass die untenstehenden Matrizen eine Gruppe bilden (diese wird die „Kristallgruppe D_4“ genannt).

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{2x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_{2y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_{2z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{2c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{4y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{4y}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie alle ihren Untergruppen.

Aufgabe 2:

(a) Finden Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte und eine entsprechende Basis von Eigenvektoren.

(b) Welche Form hat die Matrix bezüglich dieser neuen Basis?

Aufgabe 3: Die Hasen und Wolfbestände entwickeln sich wie folgt:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 6H - 2W\ , \quad \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = 2H + W\ ,$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ W \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $H(t)$ und $W(t)$.
[Hinwies: Dazu soll das lineare Differenzialgleichungssystem zunächst diagonalisiert werden.]

Aufgabe 4: Diskutieren Sie die Diagonalisierbarkeit von Drehungen (R_φ) bzw. Spiegelungen $[M_\varphi = R_\varphi \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)]$ im $\mathbb{R}^2$:

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad M_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$