Übungen zu EMTP III / MMP I	**Blatt Nr. 03**	25.10.2011

[Diskutiert in den Tutorien am **08./09.11.2011** (wegen Allerheiligen am 01.11.)]

Aufgabe 1: Es sei φ: $U \to U$ linear und A eine Matrix von φ bezüglich einer Basis $(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$ von U. Bezüglich einer anderen Basis $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ werde φ durch eine Matrix B beschrieben. Verifizieren Sie die Gültigkeit der Gleichung det$A$ = det$B$.

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} .$$

Schreiben Sie A in der Form QR, wobei Q durch die Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens auf die Spaltenvektoren der Matrix A erzeugt werden soll.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 10 & -4 & 5 \\ 15 & -50 & 60 \end{pmatrix} .$$

(a) Finden Sie Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} , \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} ,$$

so dass $LU = B$ gilt. Wie kann man det$B$ aus dieser „LU-**Zerlegung**“ bestimmen?

(b) Finden Sie mit Hilfe der LU-Zerlegung die Lösung des Systems $B\vec{x} = LU\vec{x} = \vec{b}$. Dies soll in zwei Schritten gemacht werden: Zuerst betrachtet man das System $L\vec{y} = \vec{b}$, dann bestimmt man das $\vec{x}$ des Systems $U\vec{x} = \vec{y}$.

Aufgabe 4:

(a) Beweisen Sie dass

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \sum_{\tau\in S_3} \text{sign}\tau\, \delta_{i\tau(l)}\delta_{j\tau(m)}\delta_{k\tau(n)} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \dots .$$

Die Summe besteht aus 3!= 6 Summanden, jeder stellt ein Element der Permutationsgruppe dar („S_3“). Zum Beweis empfiehlt es sich ein Symmetrieargument zu verwenden.

(b) Zeigen Sie dann durch einfaches Ausrechnen

$$\sum_{n=1}^{3} \epsilon_{ijn}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} , \quad \sum_{m,n=1}^{3} \epsilon_{imn}\epsilon_{lmn} = 2\delta_{il} , \quad \sum_{l,m,n=1}^{3} \epsilon_{lmn}\epsilon_{lmn} = 3! .$$

(c) Beweisen Sie unter Verwendung des ϵ-Symbols die folgenden Identitäten:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) ,$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) .$$