Übungen zu EMTP III / MMP I **Blatt Nr. 02** 18.10.2011

[Diskutiert in den Tutorien am 25./26.10.2011]

Aufgabe 1: Für quadratische Matrizen $A, B \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist der Kommutator definiert als

$$[A, B] := AB - BA\,.$$

(a) Bilden die quadratischen Matrizen einen Vektorraum? Wie groß ist seine Dimension?

(b) Betrachten Sie die Matrizen, die mit einer fest vorgegebenen Matrix X kommutieren. Bilden sie einen Untervektorraum?

(c) Welche Dimension hat dieser Raum für $X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$?

Aufgabe 2: Finden Sie dasjenige λ, für den der Rang folgender Matrix minimal ist, und bestimmen Sie den entsprechenden Rang:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 3: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Eine lineare Abbildung $P : U \to U$ heißt eine Projektion, wenn $P \circ P = P$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Projektion $U = \mathrm{Kern}P \oplus \mathrm{Bild}P$ gilt.
[Hinweis: Drücken Sie $\vec{x} \in U$ als $\vec{x} = (\mathbb{1} - P)(\vec{x}) + P(\vec{x})$ aus.]

(b) Gibt es umgekehrt zu jeder Zerlegung $U = U_1 \oplus U_2$ eine Projektion $P : U \to U$ mit Kern $P = U_1$ und Bild $P = U_2$?

Aufgabe 4: Der Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ergänze die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ des $\mathbb{R}^3$ zu einer Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{a}\}$. Die Abbildung P: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei die Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf die (x, y)-Ebene längs der Richtung von $\vec{a}$. Mann kann also das Bild $P(\vec{x})$ anschaulich als das *Schattenbild* von $\vec{x}$ bei einer Beleuchtung in Richtung von $\vec{a}$ interpretieren.

(a) Ermitteln Sie P als Matrix bezüglich der Standardbasis. [Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1/a_3 \\ 0 & 1 & -a_2/a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.]

(b) Zeigen Sie, dass $P^2 = P$ gilt, also dass P „idempotent" ist.

(c) Berechnen Sie die Matrix $Q{:=}\mathbb{1} - P$ der komplementären Projektion, und zeigen Sie, dass $P \circ Q = Q \circ P$ eine Nullmatrix ist.

(d) Zeigen Sie, dass auch $Q^2 = Q$ gilt, also die Idempotenz von Q vorhanden ist.