Übungen zu EMTP III / MMP I	**Blatt Nr. 01**	11.10.2011

[Diskutiert in den Tutorien am 18./19.10.2011]

Aufgabe 1: Betrachten Sie einen Vektor $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$. Drehen Sie diesen Vektor gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel φ (bitte skizzieren).

(a) Finden Sie die Koordinaten des neuen Vektors $\boldsymbol{x}' = R_\varphi(\boldsymbol{x})$.

(b) Ist diese Drehung eine lineare Abbildung? Warum?

(c) Wie transformieren $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ unter R_φ?

(d) Welches sind die Matrixelemente einer Drehung R_φ?

(e) Berechnen Sie $R_\alpha R_\beta$.

(f) Wie lautet die Inverse zu R_α, d.h. eine Matrix R_α^{-1}, für die $R_\alpha^{-1} R_\alpha = \mathbb{1}$ gilt, wobei $\mathbb{1}$ die 2×2 Einheitsmatrix ist. [Hinweis: die Antwort kann mit Hilfe von vorheriger Aufgabe ohne Rechnung gefunden werden.]

Aufgabe 2: Betrachten Sie eine lineare Abbildung, die definiert wird durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wie wirkt sie auf den Vektor $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$?

(b) Finden Sie die Matrizenprodukte AR_φ und $R_\varphi A$ (R_φ ist schon aus der vorhergehenden Aufgabe bekannt). Sind die Produkte gleich oder unterschiedlich?

(c) Wie kann diese Tatsache geometrisch gedeutet werden? Veranschaulichen Sie die Wirkung der Abbildungen AR_φ und $R_\varphi A$ auf einen Vektor $\boldsymbol{x}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit einer Skizze.

Aufgabe 3: Gegeben ist die Menge $M := \{A, B, C, D\}$ der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine List aller *möglichen* Matrixprodukte $U \circ V$ mit U, $V \in M$ an, ohne diese Matrixprodukte explizit auszurechnen.

(b) Berechnen Sie die Potenzenfolgen A, A^2, A^3 usw. sowie D, D^2, D^3 usw. explizit. Was fällt Ihnen hierbei auf?

(c) Entscheiden Sie für jede Matrix aus M, ob sie invertierbar ist oder nicht, und begründen Sie jeweils die Invertierbarkeit bzw. Nicht-Invertierbarkeit.