3.9 Supraleitung [LL VIII § 41, 43 ; sowie Stat. Phys. I / II]

Nah verwandt mit Suprafluidität [Kapitel 1.11, Seite 41]; die Wellenfunktion ist aber jetzt elektrisch geladen!

Wenn ein Metall gekühlt wird, findet bei einer bestimmten Temperatur T_c ein Phasenübergang erster oder zweiter Ordnung statt. Für $T < T_c$ besitzt das Material merkwürdige Eigenschaften:

bzw. eine „Komponente" des Materials

* keine Resistivität (d.h. $\sigma \to \infty$); Strom fließt auch ohne Spannung } „ideal"

  [Kammerlingh-Onnes 1911]

* keine Entropie; Quantenzustand
* kein Magnetfeld innerhalb des Materials: $\vec{B} = 0$

  [Meissner, Ochsenfeld 1933]

* es gibt allerdings wieder topologische Defekte, sogenannte supraleitende Wirbel. Im Wirbelkern kann $\vec{B} \neq 0$ existieren, aber der magnetische Fluß ist quantisiert, $\Phi_B \propto \hbar$!

Die Beschreibung dieser Effekte verlangt eine Wellenfunktion $\psi \in \mathbb{C}$ (für Cooper-Paare) und Gleichungen für die Wellenfunktion sowie für die elektromagnetischen Felder [Ginsburg-Landau 1950].

Der Einfachheit halber betrachten wir nur den statischen Limes.

* Blatt 4, Aufgabe V2: kanonischer Impuls im Feld: $\vec{p} \to \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$.
* Quantenmechanik: $\vec{p} \to -i\hbar\nabla \to -i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A} = -i\hbar\left(\nabla - i\frac{q}{\hbar c}\vec{A}\right)$.

[Kovariante Schreibweise: $-i\hbar\left(\partial_i - i\frac{q}{\hbar c}A^i\right) = -i\hbar\underline{\left(\partial_i + i\frac{q}{\hbar c}A_i\right)}$

Check: $i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}\psi = \ldots + q\phi\psi \Rightarrow (i\hbar\partial_t - q\phi)\psi = i\hbar\left(\partial_t + i\frac{q}{\hbar}A^0\right)\psi = i\hbar c\underline{\left(\partial_0 + i\frac{q}{\hbar c}A_0\right)}\psi$]

* Kapitel 1.11, Seite 42: Teilchenstromdichte $= \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\{\psi^*\nabla\psi\}$
* Sei $\vec{D} := \nabla - i\frac{q}{\hbar c}\vec{A}$ die „(eich)kovariante Ableitung".

$$\Rightarrow \quad \nabla\times\vec{B} - \cancel{\frac{1}{c}\dot{\vec{E}}}^{\text{statisch}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \frac{4\pi}{c}\cdot q\cdot\frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\{\psi^*\vec{D}\psi\} \qquad (1)$$

$$\frac{\hbar^2\vec{D}^2}{2m}\psi = a(T-T_c)\psi + 2\lambda|\psi|^2\psi \qquad (2)$$

Bemerkungen: * aus der mikroskopischen BCS-Theorie folgt $q = -2e$.
* (1) wird auch „London-Gleichung" genannt.

Konsequenzen:

(i) Homogene Lösung:

(1):
$$0 = \frac{4\pi q}{c}\cdot\frac{\hbar}{m}\cdot \mathrm{Im}\left\{\psi^*\left(-\frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right)\psi\right\} = -\frac{4\pi q^2}{mc^2}|\psi|^2\vec{A}$$

$\Rightarrow$ entweder $|\psi| = 0$ (normaler Zustand)
oder $\vec{A} = 0$ (supraleitender Zustand)

(2):
$$-\frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^2\psi = a(T-T_c)\psi + 2\lambda|\psi|^2\psi$$

$\Rightarrow$ im supraleitenden Zustand ($\vec{A}=0$) mit $T<T_c$ gilt $|\psi|^2 = \frac{a(T_c-T)}{2\lambda} \neq 0$.

„Kondensat von Cooper-Paaren"

(ii) Die Phase von ψ scheint unbestimmt zu bleiben.
Im Gegensatz zur Suprafluidität fungiert sie aber <u>nicht</u> als Freiheitsgrad:
die Änderung
$$\psi \to \psi' = e^{i\frac{q}{\hbar c}\chi(\vec{x})}\psi$$
hat keinen Effekt wenn gleichzeitig eine Eichtransformation
$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi(\vec{x})$$
durchgeführt wird!

(iii) Betrachten wir <u>linearisierte Lösungen</u> („Wellen") um den suprafluiden Zustand:

(1)
$$\underbrace{\nabla\times(\nabla\times\vec{A})}_{\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{A}}_{=0\text{ in Coulomb-Eichung}})-\nabla^2\vec{A}} = -\underbrace{\frac{4\pi q^2}{mc^2}|\psi|^2}_{=:\frac{1}{\lambda^2(T)}}\vec{A}$$

; $\lambda(T)$ = „Eindringtiefe" (vgl. mit $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_{e0}}{m_e}$!)

$$\Longleftrightarrow \left(-\nabla^2 + \frac{1}{\lambda^2(T)}\right)\vec{A} = 0$$

vgl. mit Seite 90:
wie Debye-Abschirmung aber mit $\vec{A}$!
Dieses erklärt den Meissner-Effekt!

(2)
$$\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi_1 = a(T-T_c)\psi_1 + 2\lambda\underbrace{\left[(\psi_0+\psi_1)^3-\psi_0^3\right]}_{3|\psi|^2\psi_1 + O(\psi_1^2)}$$

$\psi = \psi_0+\psi_1 \in \mathbb{R}$; $\psi_0^2 = |\psi|^2 = \frac{a(T_c-T)}{2\lambda}$

$$= \left[a(T-T_c) + 3a(T_c-T)\right]\psi_1$$
$$= 2a(T_c-T)\psi_1 = 4\lambda|\psi|^2\psi_1$$

$$\Longleftrightarrow \left(-\nabla^2 + \frac{1}{\xi^2(T)}\right)\psi_1 = 0 \quad ; \quad \frac{1}{\xi^2(T)} = \frac{8m\lambda|\psi|^2}{\hbar^2}$$

$\xi(T)$ = „Kohärenzlänge"

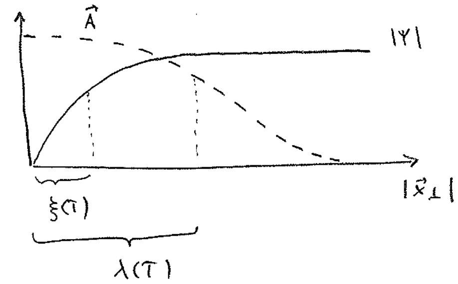
Ein wichtiger Parameter:
(„Ginsburg-Landau-Parameter")
$$\kappa^2 = \frac{\lambda^2(T)}{\xi^2(T)} = \frac{2m^2c^2}{\pi\hbar^2}\cdot\frac{\lambda}{q^2}$$

$\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$: „Typ-I" $\qquad$ $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$: „Typ-II"

Quantisierung des magnetischen Flußes [F. London 1954]

Die Gleichungen (1), (2) besitzen wieder ortsabhängige Lösungen, sogenannte topologische Defekte bzw. supraleitende Wirbel, wobei $\Psi \to 0$, $\vec{A} \neq 0$ bei $\vec{x}_\perp \to 0$, und $\Psi \to \Psi_0$, $\vec{A} \to 0$ bei $|\vec{x}_\perp| \to \infty$.

[Abrikossow 1957]



Das magnetische Feld ist ungleich null für kleine $|\vec{x}_\perp|$, und ein Fluß kann existieren:

$$\Phi_B = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{B} = \int_F d\vec{f} \cdot \nabla \times \vec{A} \underset{\uparrow \text{ Stokes}}{=} \oint d\vec{x} \cdot \vec{A}$$

Das $\vec{A}$-Feld muss im Inneren des Supraleiters verschwinden, es sei denn, es ist „eine reine Eichfunktion" (d.h. Eichtransformation von $\vec{A} = 0$): $\vec{A} = \nabla \chi$

$$\Rightarrow \quad \Phi_B = \int_0^1 d\lambda \, \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \cdot \nabla \chi = \int_0^1 d\lambda \, \frac{d}{d\lambda} \chi(\vec{x}(\lambda)) = \chi(\vec{x}(1)) - \chi(\vec{x}(0)) .$$

Seite 98: $\Psi' = e^{i \frac{q}{\hbar c} \chi(\vec{x})} \Psi$.

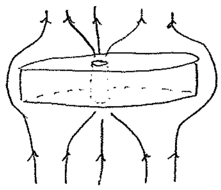
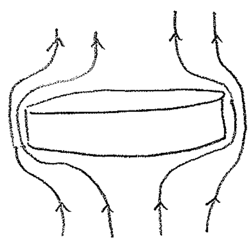
Die Wellenfunktion ist eindeutig $\Rightarrow \frac{q}{\hbar c} [\chi(\vec{x}(1)) - \chi(\vec{x}(0))] = 2\pi n , \; n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\Phi_B}} = \frac{2\pi \hbar c}{q} \cdot n = \underline{\underline{\frac{hc}{q} \cdot n}} .$$

Ein Wirbel trägt wieder (freie) Energie:

$$\Delta F_s = \int_0^L dz \int_0^{\infty} dr \, r \int_0^{2\pi} d\theta \, (f_\Psi + f_{mf} + f_m) =: T_v \cdot L$$

existiert hier! (bei ∞) — „Tension" bzw. Vortexspannung (T_v)

Wann ist  besser als  ?

$$\Phi_B = \Phi_n + \Phi_s \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi_n = -\Delta\Phi_s$$

$$\Delta F = \Delta F_n + \Delta F_s = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial B}} \Delta B_n + T_v \cdot L = \frac{LH}{4\pi} \cdot \overbrace{\Delta\Phi_n}^{A \Delta B_n} + T_v \cdot L = L \left(- \frac{\Delta\Phi_s}{4\pi} \cdot H + T_v \right) < 0$$

Kapitel 3.4, Seite 80: $\frac{V}{4\pi} H$; $V = L \cdot A$

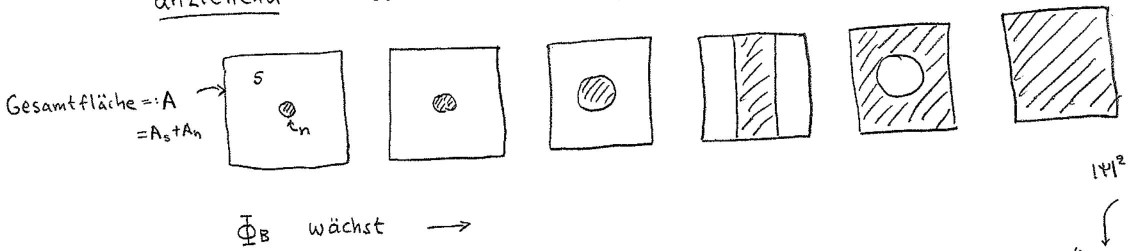
$$\Rightarrow \quad \boxed{H > H_{c1} := \frac{4\pi T_v}{(2\pi\hbar c / q)} = \frac{2 q T_v}{\hbar c}}$$

Supraleiter im externen Magnetfeld

Die Beschreibung hängt vom Ensemble ab (B oder H als Variable; Kapitel 3.4).
Das Verhalten hängt vom Typ ab (I oder II ; Seite 98).

Typ I

Es kann gezeigt werden, dass die Wirbel in diesem Fall anziehend miteinander wechselwirken. Von oben:



$$|\psi|^2 = \frac{a(T_c - T)}{2\lambda}$$

Freie Energiedichte im supraleitenden Zustand: $f_s = a(T-T_c)|\psi|^2 + \lambda|\psi|^4 = -\lambda|\psi|^4 < 0.$

—〃— im normalen Zustand: $\frac{1}{8\pi} B_n^2 \quad (\mu = 1)$

$$\Rightarrow \quad \frac{F}{L} = \frac{1}{8\pi} A_n B_n^2 - (A - A_n)\lambda|\psi|^4 = \frac{\Phi_B^2}{8\pi A_n} + (A_n - A)\lambda|\psi|^4$$

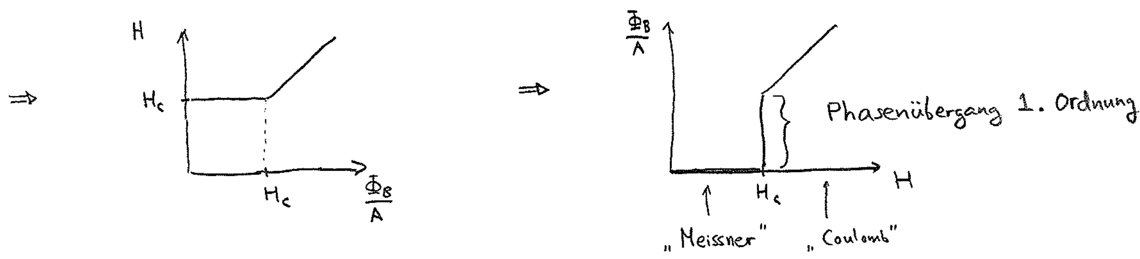
Minimiere bzgl. A_n: $\quad -\frac{\Phi_B^2}{8\pi A_n^2} + \lambda|\psi|^4 = 0 \qquad \frac{\Phi_B^2}{8\pi A_n} = A_n \lambda |\psi|^4$ bzw. $A_n = \frac{\Phi_B}{\sqrt{8\pi\lambda|\psi|^4}}$

D.h. solange $A_n < A$ gilt, ist $\frac{F}{L} = (2A_n - A)\lambda|\psi|^4 = -A\lambda|\psi|^4 + \Phi_B \cdot \sqrt{\frac{\lambda|\psi|^4}{2\pi}}$

und $H = 4\pi \frac{\partial}{\partial \Phi_B}\left(\frac{F}{L}\right) = \sqrt{8\pi\lambda|\psi|^4} = \text{const.} =: H_c$

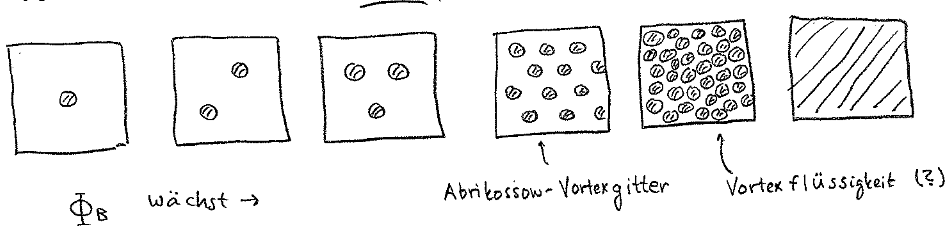
Für $A_n > A$, d.h. $\frac{\Phi_B}{A} > H_c$, sind wir im normalen („Coulombschen") Zustand, und

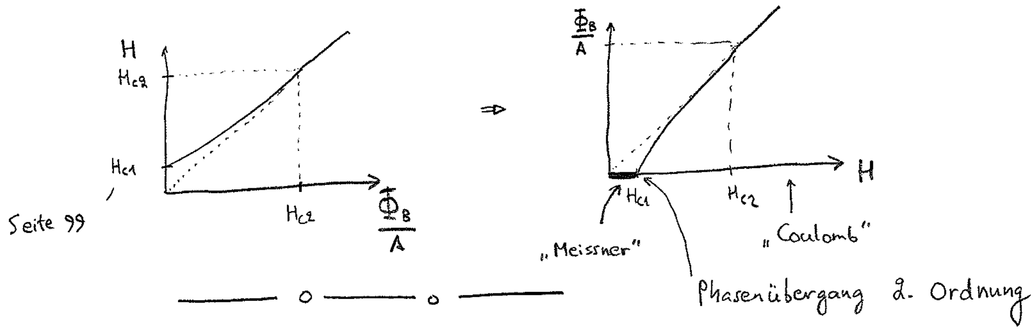
$$\frac{F}{L} = \frac{1}{8\pi} A B^2 = \frac{\Phi_B^2}{8\pi A} \quad \Rightarrow \quad H = 4\pi \frac{\partial}{\partial \Phi_B}\left(\frac{F}{L}\right) = \frac{\Phi_B}{A} = B.$$



Typ II

Die Wirbel wechselwirken abstoßend, wie in Suprafluidität.





—— o —— o ——