3.8 Magnetohydrodynamik [LL VIII 49, 51, 52]

Wir haben im Kapitel 3.7 (Seite 91) die Maxwell-Gleichungen schon teilweise mit den hydrodynamischen Gleichungen kombiniert, und jetzt betrachten wir dieses Problem genauer. Es müssen auf jeden Fall $\omega \ll \frac{1}{\tau_c}$, $k \ll \frac{1}{\lambda_{frei}}$ gelten. Wenn auch $k \ll \frac{1}{\lambda_D}$ erfüllt ist, sind die elektrischen Felder abgeschirmt und spielen keine wesentliche Rolle – deshalb MHD! Im Folgenden werden die Permeabilität μ und die Leitfähigkeit σ als Konstanten behandelt.

Freiheitsgrade: $\vec{B}(t,\vec{x})$, $\rho(t,\vec{x})$, $\vec{v}(t,\vec{x})$

jetzt wieder die Massendichte (von Elektronen), $\rho = m_e n$

Strömungsgeschwindigkeit (von Elektronen)

Gleichungen für $\vec{B}$:

Das Ohmsche Gesetz: $\vec{j}_{ind} = \sigma \vec{E}$.
Aber eigentlich muss die rechte Seite kovariant sein (d.h. Vektor), wie in der Lorentz-Kraft!

$$\Rightarrow \quad \vec{j}_{ind} = \sigma\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$$

Maxwell II (Seite 81 & 86):

$$\nabla\times\vec{H} - \cancel{\frac{1}{c}\dot{\vec{D}}} = \frac{4\pi}{c}\sigma\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \qquad \Big|\ \nabla\times$$

könnte auch mitgehalten werden, führt aber zu $\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$ welches für langsame Phänomene klein ist ($O(\omega^2)$ statt $O(\omega)$) (vgl. stark gedämpfter Oskillator)*

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} \qquad (\text{Maxwell III})$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{H}) = \frac{1}{\mu}\Big(\nabla\underbrace{(\nabla\cdot\vec{B})}_{=0} - \nabla^2\vec{B}\Big) \qquad (\text{Seite } 83)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{\mu}\nabla^2\vec{B} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(-\frac{1}{c}\partial_t\vec{B} + \frac{1}{c}\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})\right) \qquad \Big|\cdot\frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_t\vec{B} &= \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}) + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\nabla^2\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0\end{aligned}}$$

Der Term $\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})$ „koppelt" das Magnetfeld zur Hydrodynamik von geladenen Teilchen.

---

* In anderen Worten: in MHD sind die Magnetfelder fast „gefroren" und ihre Dynamik ist nichtrelativistisch.

Gleichungen für $\rho, \vec{v}$

* Teilchenzahlerhaltung wie immer: $\boxed{\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0}$ (vgl. Seite 2).

* Für die Impuls- und Energie-Erhaltungsgleichungen nehmen wir am Einfachsten den Energieimpulstensor als Ausgangspunkt.

	ideale Flüssigkeit (Seite 4)	elektromagnetisches Feld (Seite 51)
Impulsdichte g^i	ρv^i	0
Impulsstromdichte π^{ij}	$p\,\delta^{ij} + \rho v^i v^j$	$\frac{1}{4\pi\mu}\left(\delta^{ij}\frac{\vec{B}^2}{2} - B^i B^j\right)$

$\uparrow$ $\vec{E} = 0$ in beiden Termen!

$$\partial_t g^i + \sum_j \partial_j \pi^{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho\left(\partial_t \vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right) = -\nabla\vec{p} - \frac{1}{4\pi\mu}\underbrace{\sum_j \partial_j\left(\delta^{ij}\frac{\vec{B}^2}{2} - B^i B^j\right)}_{B^k\partial_i B^k - B^k\partial_k B^i}$$

$$= B^k\left(\delta^{im}\delta^{kn} - \delta^{km}\delta^{in}\right)\partial_m B^n$$

$$= B^k \varepsilon^{jik}\varepsilon^{jmn}\partial_m B^n = \vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})^i$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\partial_t\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\left[\nabla\vec{p} + \frac{1}{4\pi\mu}\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})\right]}$$

	ideale Flüssigkeit (Seite 4)	elektromagnetisches Feld (Seite 51)
Energiedichte	$\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + e$	$\frac{1}{8\pi\mu}\vec{B}^2$
Energiestromdichte	$\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + e + p\right)\vec{v}$	$\frac{c}{4\pi\mu}\vec{E}\times\vec{B}$

Warum wird $\vec{E}$ hier mitgenommen?

$\underbrace{\frac{1}{c}\partial_t\vec{B} \sim \nabla\vec{E}}_{\text{Maxwell III}}$, d.h. $\underbrace{\frac{w}{ck}}_{\ll 1}\vec{B} \sim \vec{E}$! (vgl. Seite 93)

Aber in $\vec{E}^2 + \vec{B}^2$ ist $\vec{E}^2$ klein, $\vec{E}^2 \sim \left(\frac{w}{ck}\right)^2\vec{B}^2 \ll \vec{B}^2$.

Seite 93: $\vec{E} = -\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B} + \frac{c}{4\pi\mu\sigma}\nabla\times\vec{B}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + e + \frac{1}{8\pi\mu}\vec{B}^2\right) + \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + w\right)\vec{v} + \frac{1}{4\pi\mu}\vec{B}\times(\vec{v}\times\vec{B}) - \frac{c^2}{16\pi^2\mu^2\sigma}\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})\right] = 0}$$

Und das sollte reichen! (Wäre etwas einfacher für eine inkompressible Flüssigkeit, d.h. $\rho = \text{const.}$)

——— ∘ ———

Die gefundenen Gleichungen sind sehr kompliziert, und besitzen eine große Vielfalt von Lösungen. Hier werden nur einige ihrer qualitativen Eigenschaften erwähnt.

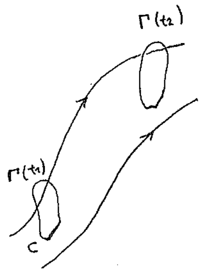
(i) Seite 93: $\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \nabla^2 \vec{B}$

Aufgabe A / Blatt 2: $\partial_t \vec{\omega} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) + \frac{\eta}{\varsigma} \nabla^2 \vec{\omega}$

„Wirbligkeit" $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$

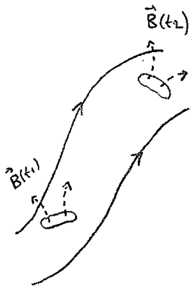
Wir bemerken dass:

* $\frac{1}{\sigma}$ „Resistivität" eine ähnliche Rolle wie η spielt, d.h. eine dissipative Konstante ist, die zur Diffusion führt $\Rightarrow$ Magnetfelder verschwinden mit Zeit!

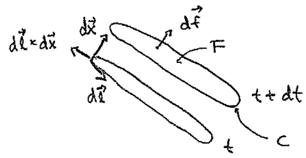


* Kapitel 1.4 (Seite 13): für $\eta \to 0$ bleibt die Zirkulation $\Gamma = \oint_C d\vec{x} \cdot \vec{v} = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{\omega}$ erhalten.

Für $\frac{1}{\sigma} \to 0$ gibt es ähnliche Erhaltungssätze für Magnetfelder: die Feldlinien sind an der Flüssigkeit „angeklebt" und bewegen sich zusammen mit ihr; der Fluß durch die Kurve C bleibt erhalten.



Beweis des letzteren Teils:



$$\Phi_B(t) = \int_{F(t)} d\vec{f} \cdot \vec{B}(t, \vec{x})$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \underbrace{\int_F d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\substack{\vec{B} \text{ ändert sich,} \\ F \text{ konstant}}} + \underbrace{\left\{ \frac{d}{dt} \int_{F(t)} d\vec{f} \right\} \cdot \vec{B}}_{\substack{\vec{B} \text{ konstant,} \\ F \text{ ändert sich}}}$$

$$= \int_F d\vec{f} \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{F(t+dt)} d\vec{f} \cdot \vec{B} - \int_{F(t)} d\vec{f} \cdot \vec{B} = -\oint_C \overset{\text{Seitenflächenelement}}{\widehat{d\vec{l} \times d\vec{x}}} \cdot \vec{B}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{d}{dt} \int_{F(t)} d\vec{f} \right\} \cdot \vec{B} = -\oint_C d\vec{l} \times \vec{v} \cdot \vec{B}$$

$$= -\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = 0 \; !$$

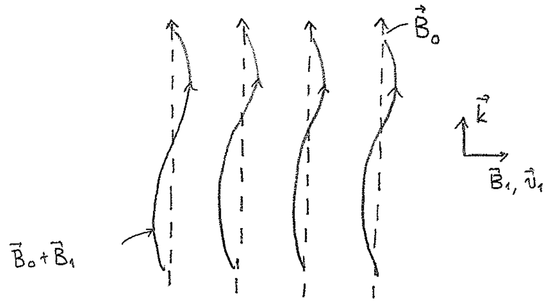
(ii) Wie schon erwähnt ist $\frac{1}{\sigma}$ eine dissipative Konstante $\Rightarrow$ Entropie wächst! Wie im Kapitel 1.8 (Seite 32) kann Folgendes gezeigt werden, ausgehend von den Gleichungen auf Seite 94:

$$\partial_t s + \nabla \cdot (s\vec{v}) = + \frac{c^2}{16\pi^2\mu^2\sigma T} (\nabla \times \vec{B})^2$$

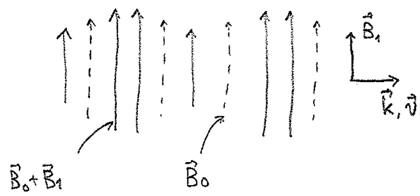
„Joulesche Wärme"

(iii) Falls σ groß ist, wie es in der Praxis häufig vorkommt, ist der dissipative Term klein, und Magnetfelder können für lange Zeiten existieren. Wir können dann die MHD-Gleichungen um einen Hintergrund $\vec{B}_0 \neq 0$ linearisieren, und nach neuartigen Wellenlösungen suchen: $\vec{B} = \underbrace{\vec{B}_0}_{\neq 0} + \vec{B}_1$ usw $\Rightarrow$ <u>Alfvén-Wellen</u>.

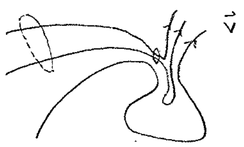
„transversale Welle" $\quad c_A^2 = \dfrac{\vec{B}_0^2}{4\pi\rho_0\mu}$



„longitudinale Welle" $\quad (c_A')^2 = c_s^2 + c_A^2$



(iv) Bei turbulenter Bewegung einer leitenden Flüssigkeit können Magnetfelder „spontan" (aus sehr kleinen ursprünglichen Feldern) erzeugt werden.



* Fluß erhalten $\Rightarrow$ $\vec{B}$ groß bei erheblicher Dehnung

* Aber $\frac{1}{\sigma} \neq 0$ (magnetische Diffusion) versucht $\vec{B}$ zu vernichten.

Unter Umständen dominiert der erste Mechanismus; die Lage wird „instabil" und $\vec{B}$ wächst exponentiell.

$\Rightarrow$ LL $\underline{\text{VIII}}$ § 55

— o —