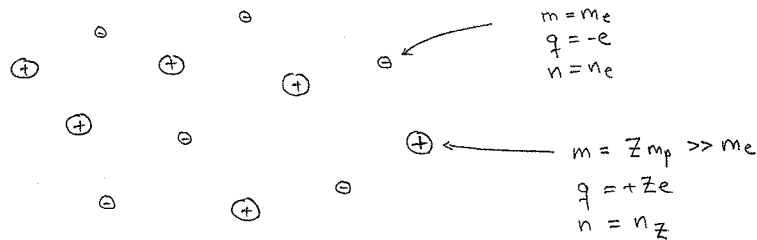


3.7 Plasmaschwingungen, Debye-Abschirmung [Lifschitz, Pitajewski: Physikalische Kinetik]

Um die Parameter des Lorentz-Modells (Seite 85: $\Omega_a, \omega_a, \Gamma_a$) zu bestimmen bzw. eine modellunabhängige Beschreibung eines Materials zu gewinnen, müssen wir die mikroskopischen Kräfte kennen. Am einfachsten geht dies in der Plasmaphysik, wobei die Ladungen „frei“ sind und nur die Lorentz-Kraft eine Rolle spielt.



Das System sei im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T , und im Durchschnitt neutral: $\rho_0 = -en_e + Zen_z = 0$.
 „ungestörter Zustand“ für groß genug λ , d.h. klein genug k

Ausgangspunkt: die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen + Lorentz-Kraft.
 (d.h. „Vakuum“)

Plasmaschwingungen sind eine „Welle“; Lösung durch Linearisierung wie in der Hydrodynamik. Grob:

(i) $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$; $\rho = \rho_0 + \rho_1$ (die schweren Ionen seien „inert“)
 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$



(ii) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$; $\vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_1$
 $\vec{j}_1 = -en_e \vec{v}_1$

(iii) $m_e \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -e(\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_1)$
 nichtrelativistisch \uparrow ; zweiter Ordnung in kleinen Größen

(ii) ; $\frac{d}{dt} n_{e1} + n_{e0} \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$ | $\frac{d}{dt}$
 $\frac{d^2}{dt^2} n_{e1} + n_{e0} \nabla \cdot \frac{d\vec{v}_1}{dt} = 0$
 $\frac{d^2}{dt^2} n_{e1} - \frac{en_{e0}}{m_e} \nabla \cdot \vec{E}_1 = 0$; $\frac{d^2}{dt^2} + 4\pi \frac{e^2 n_{e0}}{m_e} n_{e1} = 0$
 „Plasmafrequenz“ ω_p^2

Fourier-Darstellung : $(-\omega^2 + \omega_p^2) \tilde{n}_{e1} = 0$
 Vergleich mit Lorentz-Modell (Seite 87): $(\vec{k}^2 - \omega^2 \frac{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}{c^2}) \tilde{\vec{B}} = 0$

D.h. entspricht $\vec{k} = 0$ (keine Bewegung) und (Normierung durch $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \epsilon(\omega)\mu(\omega) = 1$)
 $\epsilon(\omega)\mu(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

Also wie ein Metall mit $\mu(\omega) = 1, \Gamma_1 = 0, \Omega_1^2 = \omega_p^2$ (vgl. Seite 86)

Fazit: Plasmaschwingungen möglich für $\vec{k}=0$, $\omega \neq 0$ („dynamisch“).

Ein anderer wichtiger Limes: $\vec{k} \neq 0$, $\omega = 0$ („statisch“).

Hier spielt die Physik der „Debye-Abschirmung“ eine Rolle.

Grob: betrachte das elektrische Potential ϕ in der Nähe (l klein, \vec{k} groß!) eines schweren Ions:



Thermodynamisch: $n_e \approx n_{e0} e^{-\frac{e\phi}{k_B T}} = n_{e0} e^{+\frac{e\phi}{k_B T}}$ (Blatt 4, Aufgabe 2)

„Debye-Hückel-Theorie“ $\nearrow \approx n_{e0} \left(1 + \frac{e\phi}{k_B T}\right)$

Maxwell I mit $\vec{E} = -\nabla\phi$:

$$-\nabla^2 \phi = 4\pi g = 4\pi e \left\{ -n_e + Zn_z \right\}$$

$$\approx 4\pi e \left\{ -n_{e0} - n_{e0} \frac{e\phi}{k_B T} + Zn_{z0} + Z \delta^{(3)}(\vec{x}) \right\}$$

↑ Summe = 0
 ↑ Testladung

$$\Leftrightarrow \left(-\nabla^2 + \underbrace{4\pi \frac{e^2 n_{e0}}{k_B T}}_{=: m_D^2} \right) \phi \approx 4\pi e Z \delta^{(3)}(\vec{x})$$

„Debye-Masse“*
 bzw. $\frac{1}{\lambda_D^2}$ „Debye-Radius“

(Lösung ist $r\phi \sim e^{-m_D r} = e^{-r/\lambda_D}$; Blatt 9, Aufgabe V2)

Fourier-Darstellung:

$$\underbrace{(\vec{k}^2 + m_D^2)}_{\text{homogener Teil}} \underbrace{\phi}_{\text{inhomogener Teil}} = 4\pi e Z$$

Vergleiche homogenen Teil mit Lorentz-Modell:

$$\left(\vec{k}^2 - \omega^2 \frac{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}{c^2} \right) \vec{B} = 0$$

D.h. entspricht $\omega \rightarrow 0$ (statisch) und

$$\epsilon(\omega)\mu(\omega) \approx -\frac{c^2}{\omega^2} \cdot m_D^2$$

z.B. wie ein Metall mit $\mu(\omega) = \mu_0$; $\Gamma_1 = 0$; $\Omega_1^2 = \frac{c^2}{\mu_0} m_D^2$!

* Die Dimensionalität von $4\pi \frac{e^2 n_{e0}}{k_B T}$ ist $\frac{1}{\text{Länge}^2}$ und nicht Masse².
 Bessere Notation wäre: $m_D := \frac{\hbar}{\lambda_{DC}}$

Genauer (\Rightarrow es gibt zwei Arten von Plasmaschwingungen!)

Seien $\omega \ll \frac{1}{\tau_c}$ bzw. $\frac{1}{\tau_p}$, $k \ll \frac{1}{\lambda_{\text{frei}}}$ wie in der Hydrodynamik (Seite 1).

* Die Grundgleichungen:

(i) Maxwell :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi g \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \dot{\vec{E}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{B}} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

(ii) Kontinuität: $\partial_t g + \nabla \cdot \vec{j} = 0$

(iii) Euler + Lorentz: $m_e \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) - \frac{1}{n_e} \nabla p$
 \uparrow
 $\vec{v} := \vec{v}_e$

* Linearisierung (Seite 89):
 $g \approx -en_e$
 $\vec{j} \approx -en_e \vec{v}_1$

Und, wie auf Seite 17: $\nabla p = c_s^2 \nabla(men_e) = -m_e c_s^2 \nabla n_e$
 Die Terme $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ und $\vec{v} \times \vec{B}$ sind zweiter Ordnung.

* Fourier-Darstellung: $\partial_t \rightarrow -i\omega$, $\nabla \rightarrow i\vec{k}$

\Rightarrow (i)

$$\begin{aligned} i\vec{k} \cdot \vec{E} &= -4\pi e \tilde{n}_e \\ i\vec{k} \times \vec{B} + \frac{i\omega}{c} \vec{E} &= -\frac{4\pi en_e}{c} \vec{v}_1 \\ i\vec{k} \times \vec{E} - \frac{i\omega}{c} \vec{B} &= 0 \\ i\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

(ii) $-i\omega \tilde{n}_e + ien_e \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$ (-e wurde wegdividiert!)

(iii) $-i\omega m_e \tilde{v}_1 = -e \vec{E} - \frac{m_e c_s^2}{n_e} i\vec{k} \tilde{n}_e$ $\left| -\frac{4\pi en_e}{m_e} \right.$

\Leftrightarrow

$$\underbrace{i\omega 4\pi en_e \tilde{v}_1}_{-ic\vec{k} \times \vec{B} - i\omega \vec{E}} = \omega_p^2 \vec{E} + \underbrace{c_s^2 i\vec{k} 4\pi e \tilde{n}_e}_{-i\vec{k} \cdot \vec{E}}$$

Maxwell III: $\vec{v}_1 = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$
 $\Rightarrow \vec{k} \times \vec{v}_1 = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \vec{k} \cdot \vec{E} - k^2 \vec{E}]$

\Rightarrow $c^2 [\vec{k} \vec{k} \cdot \vec{E} - k^2 \vec{E}] + \omega^2 \vec{E} = \omega_p^2 \vec{E} + c_s^2 \vec{k} \vec{k} \cdot \vec{E}$

Schreibe :
$$\tilde{E}^i = \delta^{ij} \tilde{E}^j = \underbrace{\left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right)}_{=: \tilde{E}_T^i} \tilde{E}^j + \underbrace{\frac{k^i k^j}{k^2}}_{=: \tilde{E}_L^i} \tilde{E}^j$$

"transversal"
"longitudinal"

Diese sind orthogonale Funktionen :

$$\tilde{E}_T^i \tilde{E}_L^i = \tilde{E}^j \underbrace{\left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right)}_{k^j - k^j = 0} \frac{k^i k^m}{k^2} \tilde{E}^m = 0.$$

Ausgedrückt mit diesen Projektionen erhalten wir :

$$\omega^2 \tilde{E} = \omega_p^2 \tilde{E} + c_s^2 k^2 \frac{\vec{k} \cdot \tilde{E}}{k^2} + c^2 k^2 \left(\tilde{E} - \frac{\vec{k} \cdot \tilde{E}}{k^2} \tilde{E} \right)$$

$\tilde{E}_T + \tilde{E}_L$
 \tilde{E}_L
 \tilde{E}_T

Fazit:

- * Das transversale Plasmon \tilde{E}_T ($\vec{k} \cdot \tilde{E}_T = 0$; zwei Polarisationszustände) hat die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

⇒ wie Licht im Vakuum (schnell) aber nur mit $\omega > \omega_p$ möglich.

- * Das longitudinale Plasmon \tilde{E}_L ($\vec{k} \parallel \tilde{E}_L$; ein Polarisationszustand) hat die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c_s^2 k^2$$

⇒ wie Schallwelle ("langsam") aber nur mit $\omega > \omega_p$ möglich.

Bemerkungen:

- * Beide Dispersionsrelationen können als Spezialfälle von $\epsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ gesehen werden - aber zwei verschiedene μ 's werden gebraucht, also es gibt mehr Struktur als im Lorentz-Modell.
- * Eine noch genauere Untersuchung ("kinetische Theorie" bzw. "Boltzmann-Vlasov-Gleichungen") produziert auch Imaginärteile, bekannt als Plasmondämpfung, Landau-Dämpfung, Leitfähigkeit, usw.