3.6 Dispersion und Absorption [LL VIII § 63]

Kapitel 3.5 (Seite 84):

$$\tilde{\vec{D}}(\omega,\vec{x}) = \varepsilon(\omega)\,\tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{x})$$

$$\varepsilon(\omega) \in \mathbb{C} \quad ; \quad \varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega);$$

$$\underbrace{\lim_{\omega\to 0} \varepsilon(\omega) = \varepsilon =: \varepsilon_0}_{\text{„infraroter Limes"}} ; \qquad \underbrace{\lim_{\omega\to\infty} \varepsilon(\omega) = 1}_{\text{„freier Limes"}} .$$

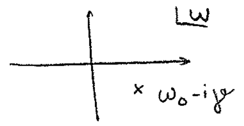
Wir können etwas mehr über die Struktur von $\varepsilon(\omega)$ erfahren, indem wir Kausalitätsargumente betrachten:

Seite 84: $\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{f}_{ret}(\omega)$; $\tilde{f}_{ret}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau} f(\tau)\Theta(\tau)$.

Inverse Transformation: $f(\tau)\Theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{f}_{ret}(\omega)\, e^{-i\omega\tau}$.

Es folgt, wie in der Analyse der retardierten Greenschen Funktion auf Seite 58, dass die Polstellen in der unteren Halbebene liegen:

$$\tilde{f}^{(0)}_{ret}(\omega) = \frac{C_0}{\omega_0 - \omega - i\gamma}$$



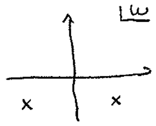
$, \gamma > 0$

Außerdem verlangen Symmetrien dass $\tilde{f}_{ret}(-\omega) = \tilde{f}^*_{ret}(\omega)$ gilt.
Um dieses zu erfüllen nehme entsprechende „Projektion":

$$\tilde{f}^{(0)}_{ret}(\omega) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[\tilde{f}^{(0)}_{ret}(\omega) + \tilde{f}^{(0)*}_{ret}(-\omega)\right]}_{\text{richtige Symmetrie}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\tilde{f}^{(0)}_{ret}(\omega) - \tilde{f}^{(0)*}_{ret}(-\omega)\right]}_{\text{falsche Symmetrie} \to \text{kann nicht da sein}}$$

Ein guter Ansatz ist also

$$\tilde{f}_{ret}(\omega) = \frac{C_0}{2}\left[\frac{1}{\omega_0 - \omega - i\gamma} + \frac{1}{\omega_0 + \omega + i\gamma}\right]$$



$$= \frac{C_0}{2}\,\frac{2\omega_0}{\omega_0^2 - (\omega + i\gamma)^2} = \frac{C_0\omega_0}{\omega_0^2 + \gamma^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma} .$$

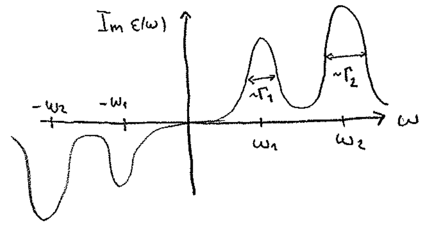
Im Lorentz-Modell redefiniert man $\omega_0^2 + \gamma^2 =: \omega_a^2$; $2\gamma =: \Gamma_a$; $C_0\omega_0 =: \Omega_a^2$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{f}_{ret}(\omega) := \sum_a \frac{\Omega_a^2}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_a}}$$

„Summe über Resonanzen"

$$\left(\Rightarrow \operatorname{Im}\varepsilon(\omega) = \sum_a \frac{\Omega_a^2\,\omega\,\Gamma_a}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma_a^2} \right)$$

„Spektralfunktion"



Beispiel

Für einen Leiter (ein Metall) gelte $\omega_1 := 0$.

Für kleine ω ist also

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\Omega_1^2}{\omega(\omega + i\Gamma_1)} + \sum_{a \geq 2} \frac{\Omega_a^2}{\omega_a^2} \overset{\omega \to 0}{\approx} \underbrace{\varepsilon_0}_{:= 1 + \sum_{a\geq 2} \frac{\Omega_a^2}{\omega_a^2}} + \frac{i\Omega_1^2}{\omega \Gamma_1}$$

D.h. $\varepsilon(\omega)$ divergiert im statischen Limes!
(vgl. Seite 71)

Aber wir können auch mehr erfahren:

$$\tilde{\vec{D}}(\omega,\vec{x}) = \varepsilon(\omega)\,\tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{x}) = \varepsilon_0\,\tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{x}) + \frac{i}{\omega}\frac{\Omega_1^2}{\Gamma_1}\tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{x}) \qquad (*)$$

Maxwell II:

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{ext}$$

In Fourier-Darstellung $\left(\vec{D}(t,\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{\vec{D}}(\omega,\vec{x})\, e^{-i\omega t} \right)$:

$$\nabla \times \tilde{\vec{H}} + \frac{i\omega}{c}\tilde{\vec{D}} = \frac{4\pi}{c}\tilde{\vec{j}}_{ext}$$

Einsatz von (*)

$$\Leftrightarrow \quad \nabla \times \tilde{\vec{H}} + \frac{i\omega}{c}\varepsilon_0 \tilde{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\left[\tilde{\vec{j}}_{ext} + \frac{1}{4\pi}\frac{\Omega_1^2}{\Gamma_1}\tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{x}) \right]$$

Wir identifizieren von hier das „Ohmsche Gesetz":

$$\vec{j}_{ind} = \sigma \vec{E}$$

„induziert"   Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\Omega_1^2}{\Gamma_1} .$$

Für Nichtleiter $(\omega_1 \neq 0)$ gibt es keinen solchen Term bei $\omega \to 0$; für größere ω dagegen verschwindet der Unterschied zwischen Leitern und Nichtleitern allmählich.

Bemerkung

Im Kapitel 3.5 (Seite 83) betrachteten wir „langsame" Schwingungen, $\omega \ll \tau_\beta^{-1}$. Was ist τ_β im Lorentz-Modell?

Für Nichtleiter, mit $\Gamma_1 \ll \omega_1$, können wir τ_β^{-1} mit ω_1 identifizieren, weil in diesem Bereich $\varepsilon(\omega) \approx$ const. gilt.

Für Leiter ist dann aber $\frac{1}{\tau_\beta} = 0$, und es gibt keine Wellenlösungen bei kleinen Frequenzen.

(vgl. Blatt 8)

Wellen mit $\omega \gtrsim \tau_P^{-1}$

Seien $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$, $\rho_{ext} = 0$, $\vec{j}_{ext} = 0$. Maxwell-Gleichungen für die Fourier-Amplituden:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \varepsilon(\omega) \tilde{\vec{E}} = 0 \\ \nabla \times \dfrac{\tilde{\vec{B}}}{\mu(\omega)} + \dfrac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) \tilde{\vec{E}} = 0 \\ \nabla \times \tilde{\vec{E}} - \dfrac{i\omega}{c} \tilde{\vec{B}} = 0 \\ \nabla \cdot \tilde{\vec{B}} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \tilde{\vec{E}} = 0 \\ \nabla \times \tilde{\vec{B}} + \dfrac{i\omega\, \varepsilon(\omega)\mu(\omega)}{c} \tilde{\vec{E}} = 0 & \mid \nabla\times \\ \nabla \times \tilde{\vec{E}} - \dfrac{i\omega}{c} \tilde{\vec{B}} = 0 & \mid \nabla\times \\ \nabla \cdot \tilde{\vec{B}} = 0 \end{cases}$$

Benutze wieder $\nabla \times (\nabla \times \tilde{\vec{B}}) = \nabla(\nabla \cdot \tilde{\vec{B}}) - \nabla^2 \tilde{\vec{B}}$ und ähnlicherweise für $\vec{E}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\nabla^2 + \dfrac{\omega^2 \varepsilon(\omega)\mu(\omega)}{c^2}\right] \tilde{\vec{B}} = 0 \\ \text{—}\,\shortparallel\,\text{—} \quad \tilde{\vec{E}} = 0 \end{cases}.$$

Ansatz: $\tilde{\vec{B}}(\omega, \vec{x}) = \tilde{\vec{B}}_0\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \overset{!}{=} \tilde{\vec{B}}_0\, e^{i\vec{k}_r\cdot\vec{x}}\, e^{-\vec{k}_i\cdot\vec{x}}$, d.h. $\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i \in \mathbb{C}^3$.

$$\Rightarrow \vec{k}^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)\mu(\omega)}{c^2} \iff \underbrace{\omega^2}_{\in \mathbb{R}} = \frac{c^2 \vec{k}^2}{n^2} \;;\; n := \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} = n_r(\omega) + i\varkappa(\omega) \in \mathbb{C}$$

Wir nennen $n_r, \varkappa$ die „optischen Konstanten"; n_r heißt „Brechungsindex".

Im Allgemeinen ist $\vec{k}_r \nparallel \vec{k}_i$ möglich, aber wir betrachten den Fall $\vec{k}_r \parallel \vec{k}_i$.
Sei $\vec{k}_0 \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor mit $k_0 := |\vec{k}_0| := \frac{\omega}{c}$.

Dann ist $\vec{k} = n\vec{k}_0$ eine Lösung („ebene Welle"): $\vec{k}^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \iff \omega^2 = \frac{c^2\vec{k}^2}{n^2}$.

$$\Rightarrow \vec{B}(t, \vec{x}) = \mathrm{Re}\left[\vec{B}_0\, e^{i(n_r(\omega)\vec{k}_0\cdot\vec{x} - \omega t)}\right] e^{-\varkappa(\omega)\vec{k}_0\cdot\vec{x}}$$

Summe von Fourier-Komponenten mit ω und $-\omega$ (mit $-\vec{k}_0$ im letzteren Fall)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k}_0\cdot\vec{B}_0 = 0$.
Ähnlich für $\vec{E}$.

Im Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}\times\vec{H}$ taucht also

$$e^{-2\varkappa(\omega)\vec{k}_0\cdot\vec{x}} = e^{-2\varkappa(\omega)\frac{\omega}{c}\underbrace{\frac{\vec{k}_0\cdot\vec{x}}{k_0}}_{=:\,l}} \quad (\text{Abstand in Richtung von } \vec{k}_0)$$

auf, weshalb die Kombination

$$\alpha(\omega) := 2\varkappa(\omega)\frac{\omega}{c}$$

als „Absorptionskoeffizient" bekannt ist.

(manchmal trägt aber $\varkappa(\omega)$ selbst diesen Namen)

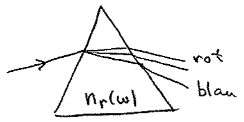
Dispersion

Für $\varkappa(\omega) = 0$ existiert eine Wellenlösung falls $\omega^2 = \frac{c^2 k^2}{n_r^2(\omega)}$.
Wenn dies für ω gelöst wird erhalten wir eine Dispersionsrelation

$$\omega = \omega(k).$$

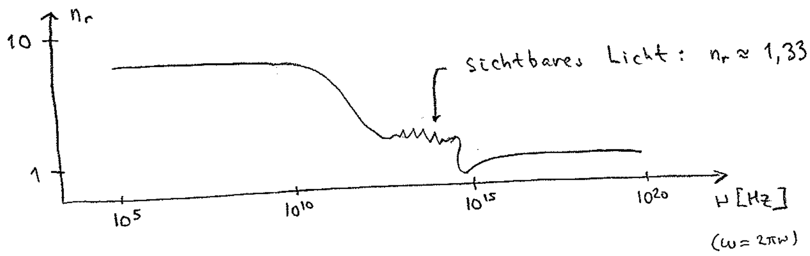
Falls $n_r(\omega)$ nicht konstant ist, ist die Funktion $\omega(k)$ nichtlinear, welches zu Dispersionseffekten führt, genau wie in der Hydrodynamik (Kapitel 1.6; Seite 22):

Auch: Phasengeschwindigkeit $v_P = \frac{\omega(k)}{k}$ $\neq$ Gruppengeschwindigkeit $v_G = \frac{d\omega(k)}{dk}$.
Und Brechung:



← aus Grenzbedingungen mit $n_r \neq 1$.

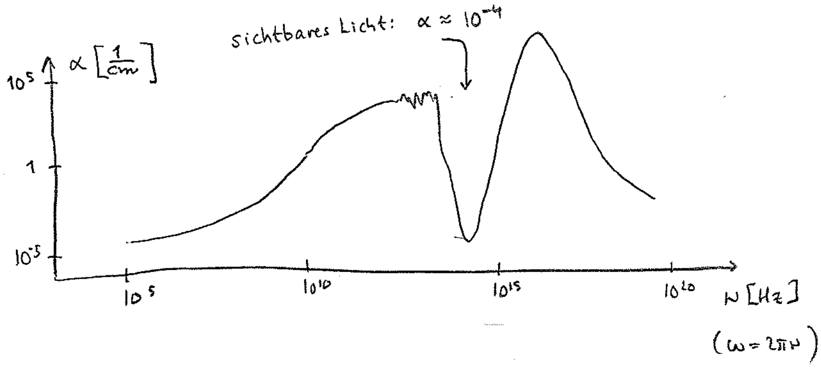
Für Wasser:



Absorption / Dämpfung / Dissipation

Für $\varkappa(\omega) > 0$ verliert die Welle Energie an die Materie; Materietemperatur steigt an, wie im Mikrowellenherd. Das bedeutet auch, dass das Medium nicht mehr transparent ist.

Für Wasser:



— · —