3.5 Maxwell-Gleichungen und Wellen in Materie [LL VIII § 56, 58]

Im Vakuum:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \quad (\mathrm{I})$$
$$\nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad (\mathrm{II})$$
$$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \quad (\mathrm{III})$$
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \quad (\mathrm{IV})$$

In Materie im statischen Limes:

$$\nabla\cdot\vec{D} \approx 4\pi\rho_{ext}$$
$$\nabla\times\vec{H} \approx \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{ext}$$
$$\nabla\times\vec{E} = 0$$
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

Wie ändern sich die Materiegleichungen falls es Zeitabhängigkeit gibt?

* Bei den homogenen Gleichungen kann nichts passieren:

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 & (\mathrm{III}) \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 & (\mathrm{IV}) \end{cases}$$

* Bei den inhomogenen Gleichungen muss die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho}_{ext} + \nabla\cdot\vec{j}_{ext} = 0$ respektiert werden:

$$4\pi(\dot{\rho}_{ext} + \nabla\cdot\vec{j}_{ext}) = \nabla\cdot\dot{\vec{D}} + c\,\underbrace{\nabla\cdot\nabla\times\vec{H}}_{\partial_i\varepsilon^{ijk}\partial_j H^k = \varepsilon^{ijk}\partial_i\partial_j H^k = 0} + c\,\nabla\cdot\,? = 0$$

symmetrisch

$$\Rightarrow\ ? = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = 4\pi\rho_{ext} & (\mathrm{I}) \\ \nabla\times\vec{H} - \frac{1}{c}\dot{\vec{D}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{ext} & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Aus den Maxwell-Gleichungen können wir die Energiedichte und -Strom des Feldes erschließen:

$$-(\mathrm{II}):\quad -\nabla\times\vec{H} + \frac{1}{c}\dot{\vec{D}} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{ext} \quad \Big|\cdot\vec{E}$$
$$(\mathrm{III}):\quad \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \quad \Big|\cdot\vec{H}$$

$$\underbrace{\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E} - \vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}} + \frac{1}{c}(\vec{E}\cdot\dot{\vec{D}} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}}) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{ext}\cdot\vec{E} \quad \Big|\cdot\frac{c}{4\pi}$$

$$H^k\varepsilon^{kij}\partial_i E^j - E^j\varepsilon^{jik}\partial_i H^k = H^k\varepsilon^{ijk}\partial_i E^j + E^j\varepsilon^{ijk}\partial_i H^k$$
$$= \varepsilon^{ijk}(\partial_i E^j H^k + E^j\partial_i H^k) = \varepsilon^{ijk}\partial_i(E^j H^k)$$
$$= \partial_i(\varepsilon^{ijk}E^j H^k) = \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{4\pi}(\vec{E}\cdot\dot{\vec{D}} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}}) + \nabla\cdot\left(\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}\right) = -\vec{j}_{ext}\cdot\vec{E}$$

Die Gleichung wird interpretiert als

$$\frac{\partial e_f}{\partial t} + \frac{\partial e_m}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{S} = 0 \,,$$

wobei:

* $\underset{\text{„Feld"}}{\delta e_f} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\cdot\delta\vec{D} + \vec{H}\cdot\delta\vec{B}\right)$ die Änderung der Energiedichte des Feldes ist (vgl. Kap. 3.4);

* $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}\times\vec{H}$ die Energiestromdichte (Poynting-Vektor) bezeichnet;

* $\frac{\partial e_m}{\partial t} = \vec{j}_{ext}\cdot\vec{E}$ („Materie") die Änderung der kinetischen Energie der externen („freien") Punktladungen auf Grund der Lorentz-Kraft darstellt:

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum_{\vec{x}_a\in V}\frac{dE_a}{dt} = \sum_{\vec{x}_a\in V}\underbrace{(\nabla_{\vec{p}_a}E_a)}\cdot\frac{d\vec{p}_a}{dt}$$

$$\nabla_{\vec{p}_a}\sqrt{m_a^2c^4+\vec{p}_a^{\,2}c^2} = \frac{\vec{p}_a c^2}{E_a} = c^2\frac{m_a\gamma_a\vec{v}_a}{m_a\gamma_a c^2} = \vec{v}_a$$

Lorentz-Kraft auf Teilchen „a"

$$= \sum_{\vec{x}_a\in V}\vec{v}_a\cdot\vec{F}_{aL}$$

$$= \sum_{\vec{x}_a\in V}\vec{v}_a\cdot q_a\left[\vec{E}(\vec{x}_a) + \frac{\vec{v}_a}{c}\times\vec{B}(\vec{x}_a)\right] \qquad \Big|\ \vec{v}_a\cdot\vec{v}_a\times\vec{B} = 0$$

$$= \sum_{\vec{x}_a\in V} q_a\vec{v}_a\cdot\vec{E}(\vec{x}_a)$$

Seite 49: $\vec{j}_{ext}(\vec{x}) = \sum_a q_a\vec{v}_a\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_a) \Rightarrow \int_{\vec{x}\in V} d^3\vec{x}\;\vec{j}_{ext}(\vec{x})\cdot\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{\vec{x}_a\in V} q_a\vec{v}_a\cdot\vec{E}(\vec{x}_a)$

D.h., $\int_V d^3\vec{x}\;\vec{j}_{ext}\cdot\vec{E} = \frac{dE_m}{dt}$, und pro Volumenelement erhalten wir, wie angekündigt, $\vec{j}_{ext}\cdot\vec{E} = \frac{\partial e_m}{\partial t}$.

<u>Bemerkung:</u>

Falls $D^i(t,\vec{x}) = \varepsilon^{ij}(\vec{x})\,E^j(t,\vec{x})$, $B^i(t,\vec{x}) = \mu^{ij}(\vec{x})\,H^j(t,\vec{x})$ gelten, mit $\varepsilon^{ij}, \mu^{ij}$ symmetrisch aber zeitunabhängig, dann ist

$$\partial_t\frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right) = \partial_t\frac{1}{8\pi}\left(E^i\varepsilon^{ij}E^j + H^i\mu^{ij}H^j\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(E^i\varepsilon^{ij}\partial_tE^j + H^i\mu^{ij}\partial_tH^j\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(E^i\partial_tD^i + H^i\partial_tB^i\right).$$

D.h., in diesem Fall können wir „das Integral" $e_f = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right)$ identifizieren, nicht nur $\partial_t e_f$.

— · —

Wellen

Um die Maxwell-Gleichungen lösen zu können brauchen wir Modelle für die Beziehungen $\vec{E} \leftrightarrow \vec{D}$ und $\vec{B} \leftrightarrow \vec{H}$.

Falls die Zeitabhängigkeit „langsam" ist, d.h. die Kreisfrequenz ω klein ist,

$$\omega \ll \frac{1}{\tau_{\vec{P}}}, \frac{1}{\tau_{\vec{M}}} \quad ; \quad \tau_{\vec{P}}, \tau_{\vec{M}} = \text{charakteristische}$$

Zeitskalen auf der sich Polarisation und Magnetisierung einstellen

können wir wieder von konstanter ε und μ ausgehen.

Ohne externe Ladungen:

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \quad \Big| \quad \nabla \times \quad ; \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\nabla \times (\nabla \times \vec{H})}_{\nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{H}}_{\frac{1}{\mu}\nabla \cdot \vec{B} = 0}) - \nabla^2 \vec{H}} - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla \times \vec{E}}_{-\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = -\frac{\mu}{c}\dot{\vec{H}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{H} = 0 .$$

D.h., eine homogene Wellengleichung mit einer geänderten „effektiven" Lichtgeschwindigkeit $\boxed{c_{eff} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$.

Ausgehend von $\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0$ erhält man dieselbe Gleichung für $\vec{E}$.

Notabene: Für Leiter (Seite 71: $\varepsilon \to \infty$) bzw. Ferromagnete (Seite 76: $\mu \to \infty$) wird $c_{eff} \to 0$, d.h. keine Wellen?

Was passiert bei größeren Kreisfrequenzen?

Falls $\omega \gtrsim \tau_{\vec{P}}^{-1}$ wird, kann $\vec{D}(t)$ nicht schnell genug zu Änderungen von $\vec{E}(t)$ reagieren, sondern wird teilweise noch von „älteren" Werten bestimmt:

$$\vec{D}(t,\vec{x}) = \vec{E}(t,\vec{x}) + \int_0^\infty d\tau\, f(\tau)\, \vec{E}(t-\tau, \vec{x})$$

kausale bzw. retardierte Abhängigkeit

Fourier-Transformation:

$$\tilde{\vec{D}}(\omega,\vec{x}) := \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\, \vec{D}(t,\vec{x})$$

$$\vec{D}(t,\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, \tilde{\vec{D}}(\omega,\vec{x})$$

Es folgt:

$$\tilde{\vec{D}}(\omega,\vec{x}) = \tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{x}) + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} \int_0^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, \vec{E}(t-\tau,\vec{x})}_{\underbrace{\int_0^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, e^{i\omega\tau}}_{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \Theta(\tau) f(\tau) e^{i\omega\tau} =: \tilde{f}_{ret}(\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega(t-\tau)} \vec{E}(t-\tau,\vec{x})}_{\tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{x})}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde{\vec{D}}(\omega,\vec{x}) = \varepsilon(\omega)\, \tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{x})}$ wobei $\boxed{\varepsilon(\omega) := 1 + \tilde{f}_{ret}(\omega)}$ die „dielektrische Funktion" heißt.

Bemerkungen:

* $$\tilde{\vec{D}}^*(\omega,\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} \underbrace{\vec{D}^*(t,\vec{x})}_{\in\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} \vec{D}(t,\vec{x}) = \tilde{\vec{D}}(-\omega,\vec{x})$$

Und auch: $\tilde{\vec{E}}^*(\omega,\vec{x}) = \tilde{\vec{E}}(-\omega,\vec{x}) \Rightarrow \varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega)$.

Die Fourier-Amplituden können aber komplex sein:

$$\varepsilon(\omega) = \mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) + i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)$$
$$\varepsilon^*(\omega) = \mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) - i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega) = \varepsilon(-\omega) = \mathrm{Re}\,\varepsilon(-\omega) + i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(-\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\,\varepsilon(-\omega) = \mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) & \text{d.h. gerade} \\ \mathrm{Im}\,\varepsilon(-\omega) = -\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega) & \text{d.h. ungerade} \end{cases}$$

* Für kleine Kreisfrequenzen:

$$\vec{D}(t,\vec{x}) = \varepsilon\, \vec{E}(t,\vec{x})$$

die „alte" Dielektrizitätskonstante aus Seite 70.

Fourier-Transformation $\Rightarrow \tilde{\vec{D}}(\omega,\vec{x}) = \varepsilon\, \tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{x})$.

D.h., $\varepsilon = \varepsilon(0)$ — deshalb keine „~" auf ε!

(Weil $\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)$ ungerade ist, verschwindet sie bei $\omega = 0$, d.h. $\varepsilon(0) \in \mathbb{R}$.)

* Für große Kreisfrequenzen:

Wenn die Schwingungen sehr schnell sind (und dementsprechend kurze Wellenlängen haben; $\omega = c_{eff}\, k = c_{eff} \frac{2\pi}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \approx \frac{2\pi\, c_{eff}}{\omega}$) kann die Materie überhaupt nicht mithalten; wir müssen also das Vakuumverhalten wiederfinden:

$$\lim_{\omega\to\infty} \varepsilon(\omega) = 1.$$

— ∘ —