3.4 Thermodynamik von elektrisierten / magnetisierten Materialien [LL VIII 10,11,30,31]

Falls die Materie, deren Elektrodynamik untersucht wird, auch eine endliche Temperatur hat, müssen die Grundgleichungen der Thermodynamik in Betracht gezogen werden.

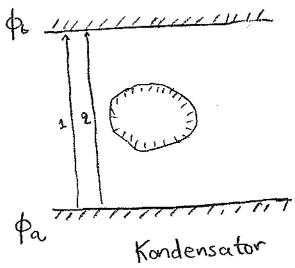
Insbesondere: $U = U(S,V,N)$; $dU = TdS - p dV + \mu dN$.

$\Rightarrow$ (i) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Welche sind die „natürlichen Variablen" von } U \text{ falls Felder vorhanden sind?} \\ \text{Wie sieht } dU \text{ aus?} \end{array} \right.$

(ii) { Welchen physikalischen Randbedingungen entsprechen verschiedene Ensemblen?

<u>In der Elektrostatik:</u>

(ii)



* Das elektrische Feld $\vec{E}$ ist eine „mikrokanonische" Variable: wir können den Wert von

$$\int_1 d\vec{x}\cdot\vec{E} = \int_2 d\vec{x}\cdot\vec{E} \underset{\vec{E}=-\nabla\phi}{=} \phi_a - \phi_b = -\underline{\text{Spannung}}$$

überall fixieren, weil

$$-\int_1 d\vec{x}\cdot\vec{E} + \int_2 d\vec{x}\cdot\vec{E} \overset{\vec{E}\perp}{=} \oint d\vec{x}\cdot\vec{E} \overset{\text{Stokes}}{=} \int d\vec{f}\cdot\nabla\times\vec{E} = 0$$

immer gilt. (Die genau $\vec{E}$-Konfiguration wird aber dynamisch bestimmt, und ist im Allgemeinen inhomogen; nur das Integral $\int d\vec{x}\cdot\vec{E}$ ist fixiert.)

* Das $\vec{D}$-Feld dagegen funktioniert mehr als „kanonische" Variable: weil $\vec{D}_n$ stetig ist, hat $|\vec{D}_n|$ (in symmetrischen Geometrien, vgl. Seite 78) einen konstanten Wert überall, wie die Temperatur. Falls <u>Ladungen</u> (statt Potentialdifferenz) der Leiterplatten fixiert werden, dann ist $\int |d\vec{f}|\,|\vec{D}_n|$ bekannt (vgl. Seite 70).

(i)

Wie ändert sich die innere Energie des Feldes, wenn wir eine Probeladungsdichte $d\rho_{ext}(\vec{x})$ in die Konfiguration einbringen?

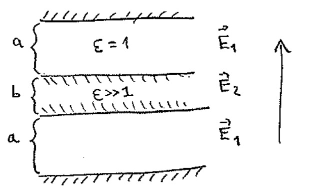
Seite 68:

$$\begin{aligned} dU &= \int d^3\vec{x}\; \phi(\vec{x})\, d\rho_{ext}(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}\; \phi(\vec{x})\; d\,\nabla\cdot\vec{D}(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}\, \Big\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Oberflächenterm}}}{\nabla\cdot(\phi\, d\vec{D})} - (\nabla\phi)\cdot d\vec{D} \Big\} = \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}\; \vec{E}\cdot d\vec{D}. \end{aligned}$$

Die „natürlichen" Variablen von U sind also $S, V, N, \vec{D}$:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN + \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}\; \vec{E}\cdot d\vec{D}$$

Beispiel 1



Es sei $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$,

und $|\Delta\phi| = 2a|\vec{E}_1| + b|\vec{E}_2| = \text{const.}$

Was sind $|\vec{D}|$, $|\vec{E}_1|$ und $|\vec{E}_2|$?

const. wie T

$\vec{D}_n$ stetig $\Rightarrow |\vec{E}_1| = |\vec{D}_n|$; $|\vec{E}_2| = \dfrac{|\vec{D}_n|}{\varepsilon}$

setzt sich dynamisch

$$|\Delta\phi| = \left(2a + \frac{b}{\varepsilon}\right)|\vec{D}_n|$$

$$\Rightarrow |\vec{E}_1| = \frac{|\Delta\phi|}{2a + \frac{b}{\varepsilon}} \quad ; \quad |\vec{E}_2| = \frac{|\Delta\phi|}{2a\varepsilon + b}$$

Beispiel 2

$e_f = \dfrac{1}{8\pi} \vec{E}\cdot\vec{D}$ (Kapitel 3.5, Seite 82)

$\vec{D}$ ist natürliche Variable $\Rightarrow$ drücke e_f als Funktion von $\vec{D}$ aus

$$\Rightarrow e_f = \frac{1}{8\pi}\frac{\vec{D}^2}{\varepsilon}.$$

Benutze jetzt $de_f = \dfrac{1}{4\pi}\vec{E}\cdot d\vec{D} \Rightarrow \vec{E} = 4\pi \nabla_{\vec{D}} e_f = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon}$ ok!

Falls $\vec{E}$ natürliche Variable sein soll, muss Legendre-transformiert werden:

$$\tilde{e}_f := e_f - \vec{D}\cdot\nabla_{\vec{D}} e_f = -\frac{1}{8\pi}\vec{E}\cdot\vec{D} = -\frac{\varepsilon}{8\pi}\vec{E}^2$$

$$d\tilde{e}_f = \frac{1}{4\pi}\vec{E}\cdot d\vec{D} - \frac{1}{4\pi} d(\vec{E}\cdot\vec{D}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{D}\cdot d\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = -4\pi \nabla_{\vec{E}} \tilde{e}_f = \varepsilon\vec{E} \quad \text{ok!}$$

Lagrange- und Hamilton-Dichten

Seiten 53-54 : $S_f + S_{mf} = \int d^3\vec{x}\int dt\, \mathcal{L}$; $\mathcal{L} = -\dfrac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \dfrac{1}{c}J_\mu A^\mu$

Seiten 50-52 $\;\overset{\curvearrowright}{=}\; \dfrac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \rho\phi + \dfrac{1}{c}\vec{J}\cdot\vec{A}$

Hamilton-Dichte bzw. Energiedichte : $e_f + e_{mf} = \mathcal{H} = \dfrac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \rho\phi - \dfrac{1}{c}\vec{J}\cdot\vec{A}$

Felder: $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_0\vec{A}$, $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$.

Konstante $\vec{E}, \vec{B}$ können mit $\phi = -\vec{x}\cdot\vec{E}$, $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{x}\times\vec{B}$ dargestellt werden.

$$\left(-\tfrac{1}{2}\nabla\times(\vec{x}\times\vec{B}) = -\tfrac{1}{2}\vec{e}_k\,\varepsilon^{klm}\partial_l\,\varepsilon^{mnp}x^n B^p = -\tfrac{1}{2}\vec{e}_k\underbrace{\varepsilon^{klm}\varepsilon^{mlp}}_{-2\delta^{kp}}B^p = \vec{B}\right)$$

$$\Rightarrow U = \int d^3\vec{x}\,\mathcal{H} = \int d^3\vec{x}\left\{\frac{\vec{E}^2}{8\pi} + \frac{\vec{B}^2}{8\pi} - \rho\vec{x}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2c}\vec{J}\cdot\vec{x}\times\vec{B}\right\} \quad \Big| \; \vec{J}\cdot\vec{x}\times\vec{B} = -\vec{x}\times\vec{J}\cdot\vec{B}$$

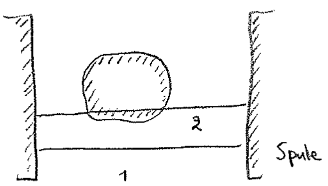
$$= V\left\{\frac{\vec{E}^2}{8\pi} + \frac{\vec{B}^2}{8\pi} - \vec{P}\cdot\vec{E} - \vec{M}\cdot\vec{B}\right\}$$

$$\Rightarrow \nabla_{\vec{E}}\left(\frac{U}{V} - \frac{\vec{E}^2}{8\pi}\right) = -\vec{P} \quad ; \quad \nabla_{\vec{B}}\left(\frac{U}{V} - \frac{\vec{B}^2}{8\pi}\right) = -\vec{M}$$

subtrahiere Energie des Vakuums

In der Magnetostatik:

(ii)



* Die magnetische Induktion $\vec{B}$ ist eine „mikrokanonische" Variable: wir können den magnetischen Fluß

$$\int_1 d\vec{f}\cdot\vec{B} = \int_2 d\vec{f}\cdot\vec{B} =: \Phi_B$$

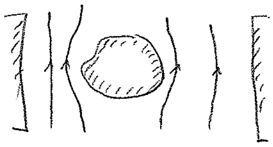
überall fixieren, weil

$$-\int_1 d\vec{f}\cdot\vec{B} + \int_2 d\vec{f}\cdot\vec{B} \overset{\text{falls keinen Beitrag von Seitenflächen; z.B. Supraleiter! } (\vec{B} \parallel \vec{\epsilon})}{=} \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{B} = \int_V d^3x\, \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

immer gilt. Die Fixierung kann (theoretisch) durch Randbedingungen erreicht werden:

$$\Phi_B = \int d\vec{f}\cdot\vec{B} = \int d\vec{f}\cdot\nabla\times\vec{A} = \oint d\vec{x}\cdot\vec{A}$$

entlang der Innerfläche der Spule.

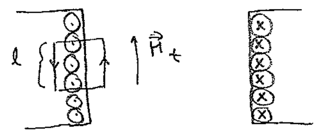


Die genaue $\vec{B}$ – Konfiguration setzt sich dynamisch, und ist im Allgemeinen inhomogen.

* Die Feldstärke $\vec{H}$ ist eine „kanonische" Variable: weil $\vec{H}_t$ stetig ist, hat $|\vec{H}_t|$ (in typischen Geometrien innerhalb der Spule; vgl. Seite 75 oben) einen konstanten Wert überall, wie die Temperatur.

Falls Strom (statt Fluß) durch die Spule fixiert wird, dann ist $\vec{H}_t$ fixiert:

Seite 74: $\nabla\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}_{ext}$



$$\int d\vec{f}\cdot\nabla\times\vec{H} = \oint d\vec{x}\cdot\vec{H}$$

$$\approx l\cdot|\vec{H}_t| \qquad \text{(kein Magnetfeld innerhalb der Spule (?))}$$

$$= \frac{4\pi}{c}\cdot\int d\vec{f}\cdot\vec{J}_{ext}$$

$$= \frac{4\pi}{c}\cdot l\cdot j \qquad \text{(Seite 74)}$$

j: Oberflächenstromdichte

$$\Rightarrow |\vec{H}_t| = \frac{4\pi}{c}\, j$$

— · —

(i) Welche ist die natürliche Variable für die innere Energie U? ...

* Seite 78: $\nabla_{\vec{B}}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{\vec{B}}{4\pi} - \vec{M} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{B} - 4\pi\vec{M}\right) = \frac{1}{4\pi}\vec{H}$

$$\Rightarrow \quad dU = \int d^3\vec{x} \; \frac{1}{4\pi}\, \vec{H}\cdot d\vec{B} \quad !$$

(allgemeiner: Kap. 3.5, Seite 82)

* Dasselbe gilt auch für $F = U - TS$; insgesamt also

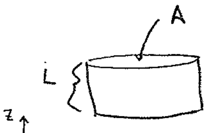
$$dF = -S\,dT - p\,dV + \mu\,dN + \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}\; \vec{H}\cdot d\vec{B} \qquad (*)$$

Beispiel

Fixiere $\Phi_B = \int d\vec{f}\cdot\vec{B}(\vec{x}) =: \underbrace{A}_{\text{Fläche}} \cdot \underbrace{B}_{\text{„durchschnittliches" } \vec{B}\text{-Feld}}$

und berechne Zustandsumme:

$$e^{-\frac{F(T,V,N,B)}{T}} = \sum_n e^{-\frac{E_n(V,N,B)}{T}}$$



Es gilt: $\frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}\, \vec{H}\cdot d\vec{B} = \underbrace{\frac{1}{4\pi}}_{d\vec{B}\,\parallel\,\vec{e}_z} \int dz\, |\vec{H}_t(z)| \int d\vec{f}\cdot d\vec{B}(\vec{x}) =: \frac{1}{4\pi}\cdot \underbrace{L}_{\text{Länge}}\, \underbrace{H}_{\text{„durchschnittliches" } \vec{H}\text{-Feld}} \cdot A\,dB = \frac{1}{4\pi} V H\, dB$

$\vec{H}_t$ stetig in $\vec{x}_\perp$-Richtung

Es folgt$^{(*)}$ $H = \frac{4\pi}{V}\frac{\partial F}{\partial B}$. Mit Hilfe von $H = B - 4\pi M$ erfahren wir die generelle Form von F:

$$F = V\left\{\frac{1}{8\pi}B^2 - BM + f(M,T)\right\}$$

M: keine thermodynamische Variable!

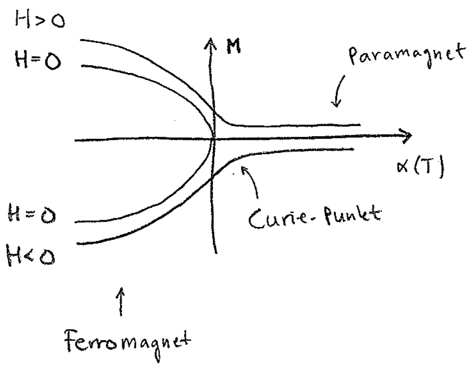
Legendre-Transformation:

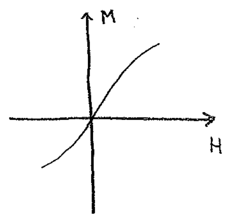
$$\tilde{F} = F - B\frac{\partial F}{\partial B} = V\left\{\frac{1}{8\pi}B^2 - BM + f - \frac{1}{4\pi}B(B-4\pi M)\right\}$$
$$= V\cdot\left\{-\frac{1}{8\pi}B^2 + f\right\}$$
$$= V\cdot\left\{-\frac{1}{8\pi}H^2 - HM - 2\pi M^2 + f(M,T)\right\}$$

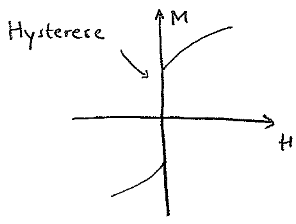
In der Landau-Theorie:

$$-2\pi M^2 + f(M,T) = \alpha(T)\,M^2 + \beta(T)\,M^4 + \ldots$$

Grundzustand minimiert $\tilde{F}$ bzgl. M:







$\alpha > 0$ (Paramagnet)

$\alpha < 0$ (Ferromagnet)

Gradient = magnetische Suszeptibilität:

$$\left.\frac{\partial M}{\partial H}\right|_{H=0} = \chi \quad \text{(vgl. Seite 75)}$$

— o —