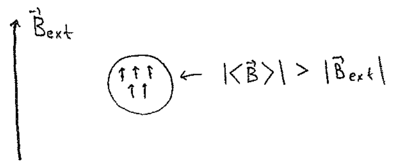
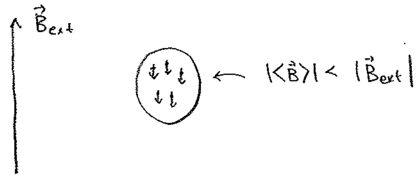
3.3 Magnetostatik in Materie [LL VIII 27-29]

Paramagnet:



Diamagnet:

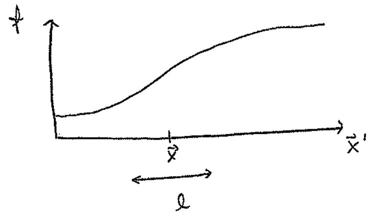


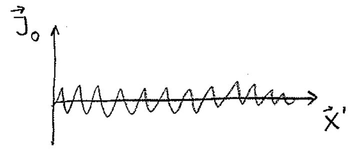
Mittelung der Maxwell-Gleichungen im statischen Limes:

$$\nabla\times\vec B - \frac{1}{c}\dot{\vec E} = \frac{4\pi}{c}\vec j \longrightarrow \nabla\times\vec B = \frac{4\pi}{c}\underbrace{\langle\vec j\rangle}_{=\vec j_{ext}+\langle\vec j_0\rangle}$$

$$\nabla\cdot\vec B = 0 \longrightarrow \nabla\cdot\vec B = 0 \quad \forall\, \vec x$$

Wie auf Seite 69 kann $\langle\vec j_0\rangle$ mit Hilfe einer „Probefunktion" definiert werden:





Es gilt:

$$\int_{|\vec x'-\vec x|\le l} d^3\vec x'\, \vec j_0(\vec x')\, f(\vec x') = \int_{|\vec x'-\vec x|\le l} d^3\vec x'\, \vec j_0(\vec x')\left[f(\vec x) + (\vec x'-\vec x)\cdot\nabla f(\vec x) + \dots\right]$$

$$\approx f(\vec x)\underbrace{\int_{|\vec x'-\vec x|\le l} d^3\vec x'\,\vec j_0(\vec x')}_{\approx 0} + \sum_{k,i}\vec e_k \underbrace{\int_{|\vec x'-\vec x|\le l} d^3\vec x'\, j_0^k(\vec x')\,\overbrace{(x'^i - x^i)}^{=:r^i}}_{\int_{|\vec r|\le l} d^3\vec r\, j_0^k(\vec x+\vec r)\, r^i}\partial_i^x f(\vec x)$$

Wie bei der Multipolentwicklung in Theorie I:

$$0 = \int_{\partial V} d\vec f\cdot \vec j_0\, r^k r^l \underset{\text{Gauß}}{=} \int_V d^3\vec r\, \partial_i\left(j_0^i r^k r^l\right) = \int_V d^3\vec r\left\{\overbrace{\nabla\cdot\vec j_0}^{0}\, r^k r^l + j_0^k r^l + j_0^l r^k\right\} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \int_V d^3\vec r\, j_0^k r^i = \frac{1}{2}\int_V d^3\vec r\,\underbrace{\left(j_0^k r^i + j_0^i r^k\right)}_{=0 \text{ laut } (*)} + \frac{1}{2}\int_V d^3\vec r\left(j_0^k r^i - j_0^i r^k\right).$$

Schreibe: $j_0^k r^i - j_0^i r^k = \left(\delta^{im}\delta^{kn} - \delta^{in}\delta^{km}\right) r^m j_0^n \overset{!}{=} \varepsilon^{lik}\varepsilon^{lmn} r^m j_0^n$

$$\Rightarrow \int_V d^3\vec r\, j_0^k r^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{lik}\int_V d^3\vec r\,\varepsilon^{lmn} r^m j_0^n = -\varepsilon^{kil}\cdot c\cdot \mu^l,$$

wobei $\vec\mu = \frac{1}{2c}\int_V d^3\vec r\, \vec r\times\vec j_0$ das magnetische Dipolmoment ist.

Dividiert durch Volumen wird dies zur Magnetisierung $\vec M := \frac{\vec\mu}{V}$.

Insgesamt:

$$\frac{1}{V}\cdot\int_{|\vec x'-\vec x|\le l} d^3\vec x'\,\vec j_0(\vec x')\, f(\vec x') \approx -\sum_{k,i}\vec e_k\,\varepsilon^{kil}\, c\, M^l\, \partial_i^x f(\vec x) = -c(\nabla f)\times\vec M$$

$V \to \frac{4\pi l^3}{3}$

$$= -c\,\nabla\times(f\vec M) + c f\,\nabla\times\vec M =: f\langle\vec j_0\rangle + \text{Oberflächenterm}.$$

Wenn wieder Oberflächenterm vernachlässigt wird, und eine mögliche zusätzliche bzw. externe Stromdichte mit $\vec{J}_{ext}$ bezeichnet wird, erhalten wir

$$\langle \vec{J}_0 \rangle \approx \vec{J}_{ext} + c\, \nabla \times \vec{M} .$$

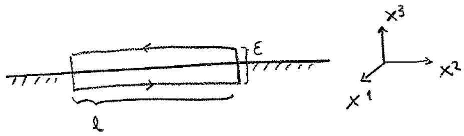
Die Maxwell-Gleichungen sind also

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{B} \approx \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{ext} + 4\pi \nabla \times \vec{M} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{ext} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

wobei $\vec{H} := \vec{B} - 4\pi \vec{M}$ die „magnetische Feldstärke" heißt.

Grenzbedingungen

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{ext}}$$



$$\int d\vec{f} \cdot \nabla \times \vec{H} = \oint d\vec{x} \cdot \vec{H} \quad \text{und} \quad \varepsilon \to 0^+$$

$\Rightarrow$ $\vec{H}_t$ stetig, es sei denn, es gibt eine Oberflächenstromdichte, z.B. $\vec{J}_{ext} = \delta(x^3)\, j\, \vec{e}_1$.

Dann ist

$$H^2(x^3>0) - H^2(x^3<0) = -\frac{4\pi}{c} j$$
$$H^1(x^3>0) - H^1(x^3<0) = 0$$

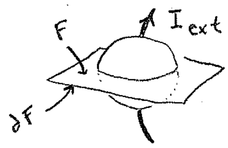
$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\int d^3\vec{x}\, \nabla \cdot \vec{B} = \int d\vec{f} \cdot \vec{B} \quad \text{und} \quad \varepsilon \to 0^+$$

$\Rightarrow$ $\vec{B}_n$ stetig

Bemerkung

$\vec{M}$ ist eine Eigenschaft der Materie; sie folgt von $\vec{J}_0$ und verschwindet wo $\vec{J}_0 = 0$. (Die Felder $\vec{B}, \vec{H}$ können dagegen auch im Vakuum existieren.)



$$\Rightarrow \int_F d\vec{f} \cdot \langle \vec{J}_0 \rangle = \underbrace{\int_F d\vec{f} \cdot \vec{J}_{ext}}_{I_{ext}} + c \underbrace{\int_F d\vec{f} \cdot \nabla \times \vec{M}}_{}$$

Stokes: $\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{M} = 0$

D.h., $\vec{J}_{ext}$ wird in der Tat von außen erzeugt.

Modelle

Die Gleichungen $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{ext}$ können nur dann gelöst werden, wenn wir $\vec{H}$ als Funktion von $\vec{B}$ ausdrücken können. Hier spielt wieder mikroskopische Physik eine Rolle. (weil $\vec{M}$ von $\vec{J}_0$ bestimmt wird.)

(i) Im einfachsten Fall sei $\vec{M}$ proportional zu $\vec{H}$:

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

„magnetische Suskeptibilität"

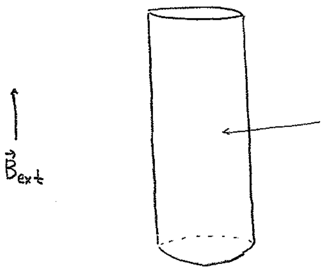
$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} = \underbrace{(1 + 4\pi\chi)}_{=:\mu} \vec{H}$$

„magnetische Permeabilität"

vgl. Seite 70: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ „andere Richtung"

Beispiele:

(a)



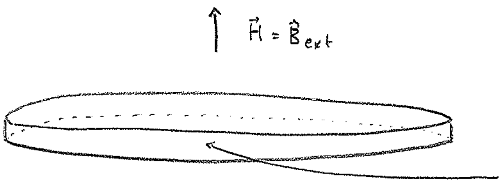
$\vec{H} = \vec{B}_{ext}$

$\vec{H}_t$ stetig $\Rightarrow$

$$\vec{H} = \vec{B}_{ext}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{B}_{ext}$$
$$\vec{M} = \frac{1}{4\pi}(\vec{B} - \vec{H}) = \frac{\mu - 1}{4\pi} \vec{B}_{ext}$$

$\vec{H} = \vec{B}_{ext}$

(b)



$\vec{B}_n$ stetig $\Rightarrow$

$$\vec{B} = \vec{B}_{ext}$$
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_{ext}}{\mu}$$
$$\vec{M} = \frac{1}{4\pi}(\vec{B} - \vec{H}) = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu} \cdot \vec{B}_{ext}$$

(ii) Kristalle:

$$B^i = \sum_j \mu^{ij} H^j$$

symmetrisch

(iii) Ferromagnete:

$\vec{M} \neq 0$ auch bei $\vec{H} \to 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \chi \to \infty \\ \mu = 1 + 4\pi\chi \to \infty . \end{cases}$

Theorie I:

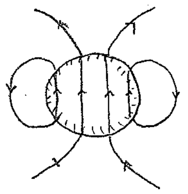
„Dipolwechselwirkung" entspricht der Potentialenergie

$$V = \frac{\vec{\mu}_a \cdot \vec{\mu}_b - 3\,\vec{n}\cdot\vec{\mu}_a\;\vec{n}\cdot\vec{\mu}_b}{r^3} \quad , \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$\vec{\mu}_b =$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\rightarrow$
$\vec{n} =$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$\vec{\mu}_a =$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\rightarrow$
$\Rightarrow V =$	0	$-2\frac{\vec{\mu}^2}{r^2}$	$+\frac{\vec{\mu}^2}{r^3}$

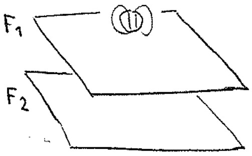
es lohnt sich, die Dipole auszurichten.

Wegen $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ sind die Feldlinien von $\vec{B}$ immer geschlossen.

$\Rightarrow$  $\vec{B}$

Gesamtfluß $\int d\vec{f}\cdot\vec{B}$ durch transversale Fläche ist konstant:

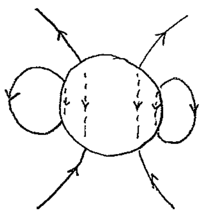
$$\int_{F_1} d\vec{f}\cdot\vec{B} - \int_{F_2} d\vec{f}\cdot\vec{B} = \int_{F_1 \cup F_2} d\vec{f}\cdot\vec{B} = \int d^3x\, \nabla\cdot\vec{B} = 0 .$$



Für F_2 tief unten $(x^3 \to -\infty)$: $\int_{F_2} d\vec{f}\cdot\vec{B} = 0$

$\Rightarrow \int_F d\vec{f}\cdot\vec{B} = 0 \quad \forall\, x^3 \quad \Rightarrow$ alles was oben geht muss auch nach unten

Bei $\vec{H}$ dagegen brauchen die Feldlinien nicht geschlossen zu sein. Ausserhalb des Materials ist $\vec{M} = 0$ und $\vec{H} = \vec{B}$. Innerhalb ist $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$, und kann auch in die entgegengesetzte Richtung zeigen. H_t ist stetig:

 $\vec{H}$

— o —