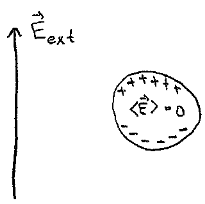
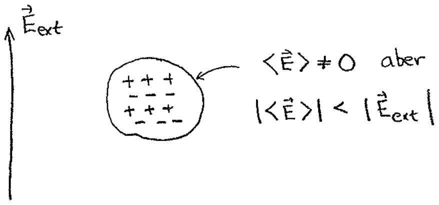
3.2 Elektrostatik von Nichtleitern [LL VIII § 6,7]

Leiter:



Nichtleiter: („Dielektrika")

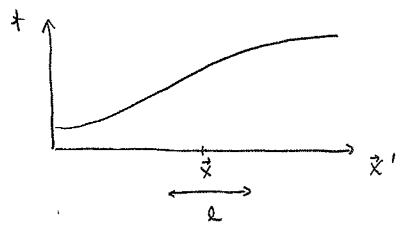


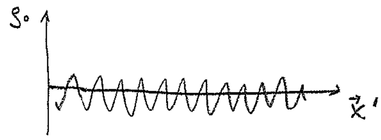
Mittelung der Maxwell-Gleichungen im statischen Limes:

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \longrightarrow \nabla\times\vec{E} = 0 \quad \forall\ \vec{x}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \longrightarrow \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\langle\rho\rangle .$$

Die gemittelte Ladungsdichte $\langle\rho\rangle$ muß genauer betrachtet werden. Sei ρ_{ext} eine mögliche „zusätzliche" bzw. „externe" Ladungsdichte, und ρ_0 die ursprüngliche „ungestörte" Ladungsdichte, wobei nach Subtraktion von ρ_{ext} angenommen werden kann, dass $\int d^3\vec{x}\,\rho_0 = 0$ gilt. Dennoch führt ρ_0 zu nichttrivialen Effekten, wie mit Hilfe einer langsam variierenden „Probefunktion" $f(\vec{x}')$ gezeigt werden kann:





$$\int_{|\vec{x}'-\vec{x}|\le l} d^3\vec{x}'\,\rho_0(\vec{x}')\,f(\vec{x}') = \int_{|\vec{x}'-\vec{x}|\le l} d^3\vec{x}'\,\rho_0(\vec{x}')\left[f(\vec{x}) + (\vec{x}'-\vec{x})\cdot\nabla f(\vec{x}) + \dots\right]$$

$$\approx f(\vec{x})\underbrace{\int_{|\vec{x}'-\vec{x}|\le l} d^3\vec{x}'\,\rho_0(\vec{x}')}_{\approx 0} + \underbrace{\left\{\int_{|\vec{x}'-\vec{x}|\le l} d^3\vec{x}'\,\rho_0(\vec{x}')(\vec{x}'-\vec{x})\right\}}_{=:\ \vec{P}(\vec{x})\cdot\frac{4\pi l^3}{3}}\cdot\nabla f(\vec{x})$$

„dielektrische Polarisation" (pro Volumen)

Hier: $\vec{P}(\vec{x})\cdot\nabla f(\vec{x}) = \nabla\cdot\left(f(\vec{x})\vec{P}(\vec{x})\right) - f(\vec{x})\,\nabla\cdot\vec{P}(\vec{x})$

$$\Rightarrow \langle\rho_0\rangle f(\vec{x}) := \frac{1}{4\pi l^3/3}\int_{|\vec{x}'-\vec{x}|\le l} d^3\vec{x}'\,\rho_0(\vec{x}')\,f(\vec{x}') \approx -\nabla\cdot\vec{P}(\vec{x})\ f(\vec{x}) + \text{„Oberflächenterm"}\ \nabla\cdot(f\vec{P})$$

Der Oberflächenterm wird vernachlässigt wie in der Variationsrechnung (nicht extensiv).

$$\Rightarrow \langle\rho\rangle = \rho_{ext} + \langle\rho_0\rangle \approx \rho_{ext} - \nabla\cdot\vec{P}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla\times\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D} \approx 4\pi\rho_{ext} \end{cases},$$

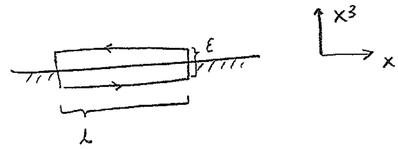
wobei $\vec{D} := \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ die „dielektrische Verschiebung" heißt.

Notabene: Die Herleitung hier enthält eine bestimmte Argumentation; die Maxwell-Gleichungen sind nicht mehr „exakt" sondern stellen eine „effektive" approximative Beschreibung dar, die nur dann gültig ist, wenn l groß genug ist.

Grenzbedingungen

Wie auf Seite 66 für Leiter:

$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$

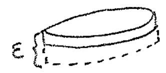


$\int d\vec{f} \cdot \nabla \times \vec{E} = \oint d\vec{x} \cdot \vec{E}$ und $\varepsilon \to 0^+$

$\Rightarrow$ $\vec{E}_t$ stetig

Aber, im Gegensatz zu Leitern, kann $\vec{E}_t$ jetzt nichtverschwindend sein.

$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_{ext}}$



$\int_V d^3x \; \nabla \cdot \vec{D} = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{D}$ und $\varepsilon \to 0^+$

$\Rightarrow$ $\vec{D}_n$ stetig (falls keine Flächenladungsdichte)

oder

$\Delta D_n = 4\pi \sigma_{ext}$ (falls auf einer Seite Leiter mit Flächenladungsdichte σ_{ext})

—— ∘ ——

Die Gleichungen $\nabla \times \vec{E} = 0$, $\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_{ext}$ können nur dann gelöst werden, wenn wir $\vec{D}$ als Funktion von $\vec{E}$ ausdrücken können. Hier spielt (komplizierte) mikroskopische Physik eine Rolle! (weil $\vec{P}$ von ρ_0 abhängig ist)

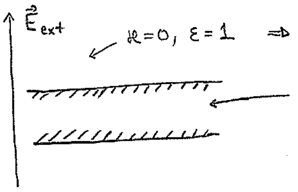
Modelle

(i) $\vec{P}$ sei proportional zu $\vec{E}$: $\vec{P} = \varkappa \vec{E}$

$\varkappa$: „Polarisierbarkeit" bzw. „dielektrische Suszeptibilität"

$$\Rightarrow \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \underbrace{(1 + 4\pi\varkappa)}_{=:\,\varepsilon} \vec{E}$$

ε: „Dielektrizitätskonstante"



$\varkappa = 0,\ \varepsilon = 1 \Rightarrow \vec{E} = \vec{D}$

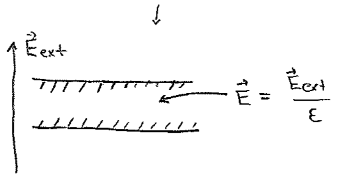
$\varkappa > 0,\ \varepsilon > 1 \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon} = \dfrac{\vec{E}_{ext}}{\varepsilon}$

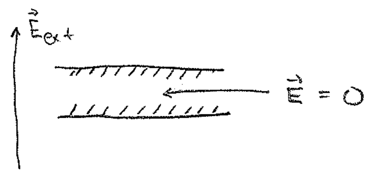
(weil $\vec{D} = \vec{D}_n$ stetig in dieser Geometrie)

(ii) Im Prinzip kann ε auch eine Funktion von $\vec{x}$ sein; die Maxwell-Gleichungen sind dann

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \left(\varepsilon(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) \right) = 4\pi \rho_{ext} .$$

(iii) Vergleiche Nichtleiter mit Leiter:





$\Rightarrow$ Man erhält die Elektrostatik von Leitern durch den formalen Grenzwert $\varepsilon \to \infty$ aus der Elektrostatik von Nichtleitern.

(iv) In Kristallen ist die Drehsymmetrie spontan gebrochen, d.h. sie sind nicht isotrop. Es kann vorkommen, dass auch wenn wir $\vec{E}$ nicht entlang der Gitterachsen orientieren, respektiert die Polarisation jedoch diese Richtungen, d.h. $\vec{P} \not\parallel \vec{E}$. Die dielektrische Konstante wird dann zu einem Tensor:

$$D^i(\vec{x}) = \sum_j \varepsilon^{ij}(\vec{x}) E^j(\vec{x}) .$$

(v) Es gibt auch sogenannte <u>ferroelektrische</u> Materialien („Ferroelettrika") in denen $\vec{P} = \vec{P}_0 \neq 0$ auch für $\vec{E}_{ext} = 0$, d.h. die eine spontane Polarization zeigen (z.B. bestimmte Harze).

[Auch: „paraelektrisch", „pyroelektrisch", „piezoelektrisch"]

Dann ist die Beziehung zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ nicht mehr linear.

— ∘ —

Ähnliche Aussagen gelten auch für viele andere modellabhängige Konstanten, wie z.B. Leitfähigkeit in Leitern:

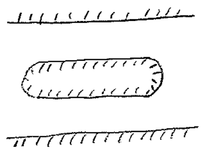
$$J^i(\vec{x}) = \sigma E^i(\vec{x}) \quad \text{oder} \quad \sigma^{ij} E^j(\vec{x}) \quad \text{oder} \quad \sigma^{ij}(\vec{x}) E^j(\vec{x}) \ \ldots$$

— ∘ —

Jenseits der Modelle

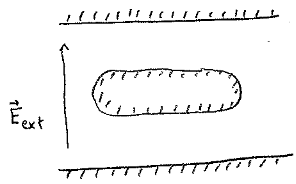
Im Prinzip kann die Dielektrizitätskonstante auch ohne Näherungen bestimmt werden. Man spricht in diesem Zusammenhang von der Theorie des linearen Responses.

(i)



Sei zuerst $\vec{E}_{ext} = 0$. Mit einer Testladung könnte man innerhalb der Materie ein Feld $\vec{E}_0$ finden. Die Lorentz-Kraft $\vec{F}_0 = q\vec{E}_0$ kürzt sich gegen andere Kräfte, so dass die Lage statisch ist. ($\vec{E}_0 = 0$ ist auch eine Möglichkeit.)

(ii)



In der Präsenz von $\vec{E}_{ext} \neq 0$ ändern sich die Ladungsdichte ($\rho = \rho_0 + O(\vec{E}_{ext})$) und das mikroskopische Feld ($\vec{E} = \vec{E}_0 + O(\vec{E}_{ext})$) so dass ein neuer statischer Zustand gefunden wird.

Wir können $\vec{E}_{ext}$ mit $\vec{D}$ identifizieren (vgl. Seite 70).
Eine direkte „Messung" gibt also die Beziehung $E^i = f(\vec{E}_{ext})$.
Verglichen mit $D^i(\vec{x}) = \varepsilon^{ij}(\vec{x})\, E^j(\vec{x})$ bzw. $E^i(\vec{x}) = (\varepsilon^{-1})^{ij}(\vec{x})\, D^j(\vec{x})$
erhalten wir

$$(\varepsilon^{-1})^{ij}(\vec{x}) := \frac{\partial E^i(\vec{x})}{\partial E^j_{ext}} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow \text{Messung bzw. Berechnung} \\ \longleftarrow \text{externer „Kontrollparameter".} \end{array}$$

Diese inverse Matrix fungiert also als „Responsefunktion".

In der Praxis sieht die Prozedur ungefähr so aus:

$\vec{E}_{ext}$ gegeben

$\Rightarrow$ bestimme $\rho - \rho_0$ aus Kraftgleichungen

$\Rightarrow$ löse $\nabla \cdot (\vec{E} - \vec{E}_0) = 4\pi(\rho - \rho_0)[\vec{E}_{ext}]$,

d.h. $\vec{E} - \vec{E}_0 =$ „$(\nabla \cdot)^{-1}$" $4\pi\,(\rho - \rho_0)\,[\vec{E}_{ext}]$ — Greensche Funktion!

$\Rightarrow$ ableite $\partial E^i / \partial E^j_{ext}$.

Wir werden später dies* auch explizit tun!

---

* oder Ähnliches