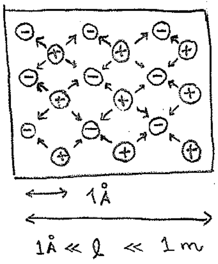
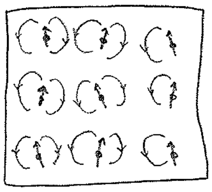
3. Elektrodynamik in Materie [Fließbach, Elektrodynamik, Kap. 27–34]

Wenn ein Material geladene Teilchen bzw. Dipole enthält, gibt es einen großen Unterschied zwischen den mikroskopischen („lokalen", „exakten") und makroskopischen („gemittelten", „effektiven") Feldern:

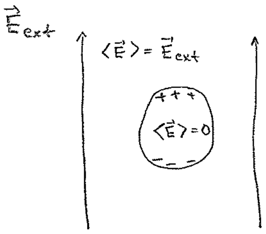




Die Maxwell-Gleichungen gelten für die mikroskopischen Felder.
Eine makroskopische Beschreibung verlangt, dass wir über eine Distanzskala ℓ „mitteln": $\vec{E} \to \langle \vec{E} \rangle \simeq \frac{1}{\ell^3} \int d^3\vec{x}'\, \vec{E}$ usw. Dabei hängt das Ergebnis davon ab, wie die Ladungen sich auf externe Felder reagieren, d.h. was für mikroskopische Kräfte zu finden sind $\Rightarrow$ Insulator, Halbleiter, Metall, Plasma, …

3.1 Elektrostatik von Leitern [LL VIII §1-3]

Bei Leitern (Metall, Plasma, …) rufe $\langle \vec{E} \rangle \neq 0$ einen Strom hervor: $\vec{J} = \underbrace{\sigma}_{\text{„Leitfähigkeit"}} \langle \vec{E} \rangle$.
Im statischen Limes gibt es keinen Strom $\Rightarrow \langle \vec{E} \rangle = 0$ im Leiter!



$\Rightarrow$ Ladungen sitzen auf der Oberfläche.

Der Einfachheit halber lassen wir im Folgenden „<" und „>" weg.
Die Maxwell-Gleichungen erhalten die Formen

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \xrightarrow{\langle\,\rangle\ \&\ \text{statisch}} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{für } \vec{x} \notin \partial V \qquad (\mathrm{MI})$$

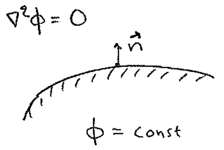
$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \longrightarrow \nabla \times \vec{B} = 0 \quad \forall \vec{x} \qquad (\mathrm{MII})$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \longrightarrow \nabla \times \vec{E} = 0 \quad \forall \vec{x} \qquad (\mathrm{MIII})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \forall \vec{x} \qquad (\mathrm{MIV})$$

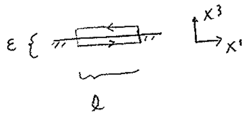
Randbedingungen

* $\nabla \times \vec{E} = 0$ & einfach zusammenhängendes Gebiet $\overset{\text{Theorie I}}{\Rightarrow}$ $\vec{E} = -\nabla\phi$.
* $\vec{E} = 0$ im Inneren $\Rightarrow$ $\phi =$ const. im Inneren
* MI für $\vec{x} \notin \partial V$ $\Rightarrow$ $\nabla^2\phi = 0$ für $\vec{x} \notin \partial V$ (Laplace)



$\leftarrow$ Welche sind die Randbedingungen für ϕ an ∂V?

Sei $\vec{n} \parallel \vec{e}_3$. Integriere $\nabla \times \vec{E} = 0$ um die Oberfläche (vgl. Seite 14):



$$\underset{|d\vec{f}|\vec{e}_2}{\int d\vec{f} \cdot \nabla \times \vec{E}} \underset{\text{Stokes}}{=} \oint d\vec{\ell} \cdot \vec{E} = \ell\left(-E^1(x^3>0) + E^1(x^3<0)\right) + O(\varepsilon) = 0$$

$\Rightarrow$ E^1 ist stetig; E^2 ebenfalls.

D.h., $\underset{\text{tangential zu Oberfläche}}{\vec{E}_t}$ ist stetig und damit <u>null</u> auch für $x^3 = 0^+$.

$\Rightarrow$ $\vec{E} = -\nabla\phi\,|_{\partial V} \parallel \vec{n}$, d.h. ϕ ist konstant für $x^3 = 0^+$.

Die Oberfläche ist also <u>Äquipotentialfläche</u>.

Die Normalkomponente $E_n = \vec{n} \cdot \vec{E}$ ist dagegen im Allgemeinen nicht stetig:

$$\int d^3x\, \nabla \cdot \vec{E} \underset{\text{Gauß}}{=} \int |d\vec{f}| \left[E_n(x^3>0) - E_n(x^3<0) \right] + O(\varepsilon) \underset{\text{MI}}{=} 4\pi \int d^3x\, \delta(x^3)\, \sigma$$

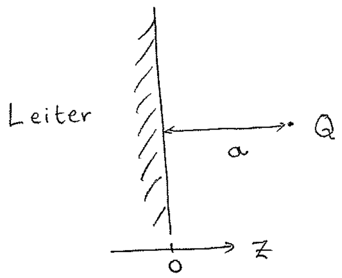
σ: Flächenladungsdichte

Integral über die ganze Oberfläche ergibt:

$$\text{Gesamtladung } Q = \int |d\vec{f}|\, \sigma = \frac{1}{4\pi} \int d\vec{f} \cdot \vec{E}(x^3>0)$$

Fazit: Die Laplace-Gleichung $\nabla^2\phi = 0$ muss im Äußeren mit den Randbedingungen $\phi|_{\partial V} = \text{const}$, $\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \nabla\phi = -4\pi Q$ gelöst werden.

Beispiel („Spiegelladungsmethode")



Punktladung erzeugt Potential $\phi = \frac{Q}{r}$, aber dazu wird eine allgemeine Lösung von $\nabla^2 \phi = 0$ gebraucht, um die Randbedingungen am $z = 0$ erfüllen zu können.

Die Idee: $\phi' = \dfrac{Q'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ erfüllt $\nabla^2 \phi' = -4\pi Q' \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$,

d.h. $\nabla^2 \phi' = 0$ falls $z' < 0$!

Wähle aus Symmetriegründen Ladung $Q' := -Q$

am $\vec{x} = (0,0,-a) =: -\vec{x}_Q$.

Das Gesamtpotential:

$$\phi = Q \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_Q|} - \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}_Q|} \right) = Q \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right)$$

Randbedingung:

$$\phi(z=0) = 0 = \text{const.}$$ automatisch erfüllt!

Flächenladungsdichte:

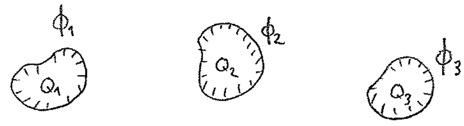
$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \vec{n} \cdot \nabla \phi \Big|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \phi \Big|_{z=0} = -\frac{Q}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{2(z-a)}{\sqrt{}^{\,3}} + \frac{1}{2} \frac{2(z+a)}{\sqrt{}^{\,3}} \right\}_{z=0}$$

$$= -\frac{Qa}{2\pi} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Wir brauchen über σ jetzt nicht zu integrieren, weil der Leiter als unendlich groß und deshalb von einer unbestimmten Gesamtladung angenommen wurde.

— · —

Elektrostatische Energie



Integriere über Raumgebiet außerhalb der Leiter:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_V d^3\vec{x}\; \vec{E}^2 = -\frac{1}{8\pi}\int_V d^3\vec{x}\; \vec{E}\cdot\nabla\phi = -\frac{1}{8\pi}\int_V d^3\vec{x}\left\{\nabla\cdot(\vec{E}\phi) - \phi\underbrace{\nabla\cdot\vec{E}}_{=0}\right\}$$

$$\underset{\text{Gauß}}{=} -\frac{1}{8\pi}\sum_a \int_{\partial V_a} d\vec{f}\cdot\vec{E}\,\phi_a \underset{\uparrow}{=} \sum_a \frac{1}{2}\phi_a Q_a$$

$\phi = \text{const}$ auf ∂V & Q_a wie auf Seite 66 (Richtung von $\vec{n}$ entgegengesetzt!)

Auf der anderen Seite:

$$\delta U = \frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\; \vec{E}\cdot\delta\vec{E} = -\frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\; \nabla\phi\cdot\delta\vec{E} = -\frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\left\{\nabla\cdot(\phi\delta\vec{E}) - \phi\underbrace{\nabla\cdot\delta\vec{E}}_{=0}\right\}$$

$$\underset{\text{Gauß}}{=} -\frac{1}{4\pi}\sum_a \int_{\partial V_a} d\vec{f}\cdot\phi_a\delta\vec{E} \underset{\uparrow}{=} \sum_a \phi_a\,\delta Q_a$$

$\phi = \text{const}$ auf ∂V

Die Arbeit, die man aufwenden muss, um Ladung δQ_a von ∞ auf Leiter a mit Potential ϕ_a zu bringen.

Wie können diese in Einklang gebracht werden?*

$\Rightarrow$ Die Abhängigkeit zwischen Q_a und ϕ_a soll linear sein, $Q_a = \sum_b C_{ab}\phi_b$, wobei C_{ab} die <u>Kapazitätskoeffizienten</u> sind. Dann ist nämlich

$$\sum_a Q_a\,\delta\phi_a = \sum_{a,b}\delta\phi_a\, C_{ab}\,\phi_b \quad ; \quad \sum_a \phi_a\,\delta Q_a = \sum_{\substack{a,b\\ b\ \ ba\ \ a}} \phi_{\cancel{a}}\, C_{\cancel{ab}}\,\delta\phi_{\cancel{b}} = \sum_{a,b}\delta\phi_a\, C_{ba}\,\phi_b$$

Laut dem „Onsagerschen Prinzip" sind C_{ab} <u>symmetrisch</u>, vgl. unten $\Rightarrow$ OK!

Inversion: $\phi_a = \sum_b C^{-1}_{ab}\, Q_b$.

Eine andere Vorgehensweise:

$$\delta U = \frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\; \vec{E}\cdot\delta\vec{E} = -\frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\; \vec{E}\cdot\delta\nabla\phi = -\frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\left\{\nabla\cdot(\vec{E}\delta\phi) - \delta\phi\underbrace{\nabla\cdot\vec{E}}_{=0}\right\}$$

$$\underset{\text{Gauß}}{=} -\frac{1}{4\pi}\sum_a\int_{\partial V_a} d\vec{f}\cdot\vec{E}\,\delta\phi_a = \sum_a Q_a\,\delta\phi_a \Rightarrow Q_a = \frac{\partial U}{\partial\phi_a}$$

$$\Rightarrow \quad C_{ab} = \frac{\partial Q_a}{\partial\phi_b} = \frac{\partial}{\partial\phi_b}\left(\frac{\partial U}{\partial\phi_a}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial\phi_a\partial\phi_b} \qquad \text{symmetrisch!}$$

---

* Genauer: $U = \frac{1}{2}\sum_a\phi_a Q_a \Rightarrow \delta U = \sum_a \frac{1}{2}(\delta\phi_a Q_a + \phi_a\delta Q_a) \overset{!}{=} \sum_a \phi_a\,\delta Q_a$

$$\Rightarrow \sum_a Q_a\,\delta\phi_a = \sum_a \phi_a\,\delta Q_a$$