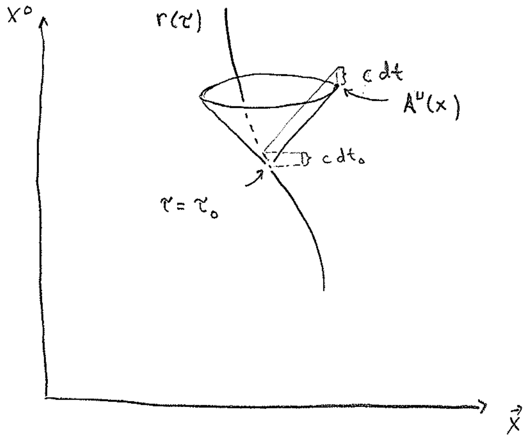
9.4 Strahlung aus einer beschleunigten Punktladung [LL II § 73-76]

$$\vec{E}(x) = \frac{q(\vec{n}-\vec{\beta})}{R^2\gamma^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3} + \frac{q\,\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]}{cR(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}$$

Seite 60

$$\vec{B}(x) = \vec{n}\times\vec{E}(x)$$

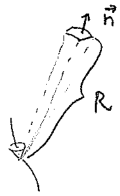
Ohne Herleitung aber folgt aus $\phi, \vec{A}$ auf Seite 59.



Hier: $\begin{cases} R := |\vec{x}-\vec{r}(\tau_0)| = x^0 - r^0(\tau_0) \quad \text{(Lichtkegel)} \\ \vec{\beta} := \left.\frac{d\vec{r}}{c\,dt_0}\right|_{\tau_0} \\ \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} \\ \vec{n} := \frac{\vec{x}-\vec{r}(\tau_0)}{R} \end{cases}$

Desweiteren gilt $\frac{\partial t_0}{\partial t} = \underbrace{\frac{d(ct_0)}{d\tau_0}}_{u^0}\frac{\partial\tau_0}{\partial x^0} \overset{\text{Seite 60}}{=} \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}}$ $(*)$.

Energiestromdichte = Poynting-Vektor = $\vec{S} := \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$



In den Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Leistung:

$$dP = R^2\,\vec{S}\cdot\vec{n}\,d\Omega$$

$\vec{E}$ und folglich $\vec{B}$ haben zwei Teile: $\frac{\vec{\mu}}{R^2} + \frac{\vec{\nu}}{R}$. Für $R\to\infty$ liefert nur der Teil $\frac{\vec{\nu}}{R}$ einen endlichen Beitrag in $dP/d\Omega$. Diesen Teil nennen wir die Strahlung:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^6}\Big(\underbrace{\{\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\}}_{\vec{E}}\times\underbrace{\{\vec{n}\times[\underbrace{\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})}_{\vec{E}}]\}}_{\vec{B}}\Big)\cdot\vec{n}$$

$$\{\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})\}\cdot\vec{n} \underset{\text{Summenkonvention}}{=} n^i\varepsilon^{ijk}E^j\varepsilon^{klm}n^lE^m$$
$$= n^in^lE^jE^m(\delta^{il}\delta^{jm}-\delta^{im}\delta^{jl}) = |\vec{E}|^2-(\vec{n}\cdot\vec{E})^2$$

Aber $\vec{E} = \vec{n}\times[\;] \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{E} = 0$!

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^6}\left|\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\right|^2\Big|_{\tau_0}$$

Betrachtet aus Sichtpunkt des „damaligen" Abstrahlers:

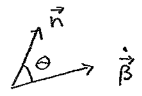
$$\frac{dP_0}{d\Omega} := \frac{dP}{d\Omega}\frac{\partial t}{\partial t_0} \overset{(*)}{=} \boxed{\frac{q^2}{4\pi c(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^5}\left|\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\right|^2}$$

Energiestrom enthält $\frac{\partial E}{\partial t}$.

Wir skizzieren das Ergebnis in zwei Spezialfällen:

(i) Der nichtrelativistische Grenzfall: $|\vec\beta| \ll |\vec n| = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP_0}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \left| \vec n \times [\vec n \times \dot{\vec\beta}] \right|^2$$



$$\vec n \times \dot{\vec\beta} \perp \vec n$$

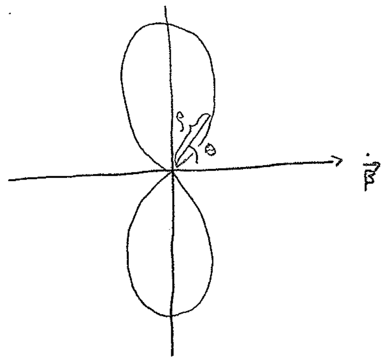
$$\Rightarrow |\vec n \times [\vec n \times \dot{\vec\beta}]| = |\vec n \times \dot{\vec\beta}| = \dot\beta\, |\sin\theta| \quad ; \quad \dot\beta := |\dot{\vec\beta}|$$

$$= \frac{q^2}{4\pi c^3}\, \dot v^2 \sin^2\theta$$

Skizze:

Die Polarkoordinate ϱ gebe den Betrag von $dP_0/d\Omega$ in Richtung θ.

$\Rightarrow$ Strahlungsleistung senkrecht auf $\dot{\vec\beta}$.



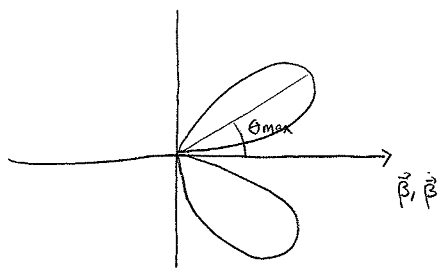
(ii) Beschleunigung in die Richtung von Geschwindigkeit: $\dot{\vec\beta} \parallel \vec\beta$

$$\Rightarrow \quad \vec\beta \times \dot{\vec\beta} = 0 \quad ; \quad |\vec n \times \dot{\vec\beta}| = \dot\beta\, |\sin\theta| \quad ; \quad \vec n \cdot \vec\beta = \beta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP_0}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}\, \dot v^2\, \frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

D.h., für $\beta \to 1$ $(v \to c)$ wird $\frac{dP_0}{d\Omega}$ groß für $\cos\theta \approx 1$, d.h. in der Vorwärtsrichtung.

Bestimme $\cos\theta_{max} =: \varkappa$



$$\frac{d}{d\varkappa} \frac{1-\varkappa^2}{(1-\beta\varkappa)^5} = \frac{-2\varkappa}{(\ )^5} + 5\beta \frac{(1-\varkappa^2)}{(\ )^6} = 0$$

$$5\beta(1-\varkappa^2) - 2\varkappa(1-\beta\varkappa) = 0$$

$$\varkappa^2(-5\beta+2\beta) - 2\varkappa + 5\beta = 0$$

$$\varkappa = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 3\beta\cdot 5\beta}}{-6\beta} = -\frac{1}{3\beta} + \frac{1}{3\beta}\sqrt{1+15\beta^2}$$

Für $\beta \to 1$: $\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \qquad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \qquad \beta \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}, \quad \gamma \gg 1.$

$$\Rightarrow \cos\theta_{max} \approx \underline{\underline{1 - \frac{\theta_{max}^2}{2}}} \quad = -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2\gamma^2}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2\gamma^2}\right)\sqrt{16 - \frac{15}{\gamma^2}}$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{6\gamma^2} + \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{2\gamma^2}\right)\left(1-\frac{15}{32\gamma^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{\gamma^2}\left(-\frac{1}{6} + \frac{4}{6} - \frac{5}{8}\right) = 1 - \underline{\underline{\frac{1}{8\gamma^2}}} \quad ; \quad \theta_{max} \approx \frac{1}{2\gamma}$$

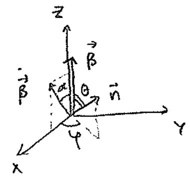
Strahlungsverlust

Wenn wir über die Winkel integrieren, erhalten wir die Gesamtleistung $P_0 = \int d\Omega \, \frac{dP_0}{d\Omega}$, die als Strahlung wegtransportiert wird. Die Integration ist einigermaßen kompliziert; hier die wichtigsten Schritte:

Seite 60 $\Rightarrow \quad \vec{n} \times [(\vec{n}-\vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] = (\vec{n}-\vec{\beta})\, \vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}} - \dot{\vec{\beta}}\,(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})$

$$\Rightarrow |\vec{n} \times [(\vec{n}-\vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2 = \underbrace{\dot{\beta}^2 \left[1 - 2\vec{n}\cdot\vec{\beta} + (\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2\right]}_{(i)} + \underbrace{2\,\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}\;\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\,(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})}_{(ii)} + \underbrace{(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2}_{(iii)} \left(1 - \cancel{2\vec{n}\cdot\vec{\beta}} + \beta^2 - 2 + \cancel{2\vec{n}\cdot\vec{\beta}}\right)$$

Wähle Koordinaten:



$\vec{\beta} = (0, 0, \beta)$

$\dot{\vec{\beta}} = \dot{\beta}\,(\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$

$\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$\Rightarrow \quad \vec{n}\cdot\vec{\beta} = \beta\cos\theta =: \beta z \quad ; \quad \vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}} = \dot{\beta}\,(\sin\theta\cos\varphi\sin\alpha + \cos\theta\cos\alpha) \quad ; \quad \vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}} = \beta\dot{\beta}\cos\alpha$

$\uparrow$ φ-Abhängigkeit nur hier.

Winkelintegral: $\quad \int d\Omega = \int_{-1}^{+1} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \quad ;$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \; 1 = 2\pi \quad (i)$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi = 2\pi \cdot 0 \quad (ii)$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \quad (iii)$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{q^2}{2c} \int_{-1}^{+1} dz \, \frac{1}{(1-\beta z)^5} \Big\{ \dot{\beta}^2 (1 - 2\beta z + \beta^2 z^2) \quad (i)$$

$$+ 2\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}\,(1-\beta z)\,\dot{\beta}\,\Big(\sin\theta \overset{0}{\cancel{\cos\varphi}} \sin\alpha + \overbrace{\cos\theta\cos\alpha}^{z\,\frac{\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}}{\beta\dot{\beta}}}\Big) \quad (ii)$$

$$+ (\beta^2-1)\,\dot{\beta}^2 \Big(\underbrace{\sin^2\theta}_{1-z^2} \underbrace{\cos^2\varphi}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\frac{(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2}{\beta^2\dot{\beta}^2}} + 2\sin\theta \overset{0}{\cancel{\cos\varphi}} \sin\alpha\cos\theta\cos\alpha + \underbrace{\cos^2\theta}_{z^2} \underbrace{\cos^2\alpha}_{\frac{(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2}{\beta^2\dot{\beta}^2}}\Big) \quad (iii) \Big\}$$

$$= \frac{q^2}{2c} \left\{ \dot{\beta}^2 \underbrace{\int_{-1}^{+1} dz \, \frac{1 - 2\beta z + \beta^2 z^2 + \frac{(\beta^2-1)(1-z^2)}{2}}{(1-\beta z)^5}}_{\frac{4}{3}\gamma^4 \;\; ; \;\; \gamma^2 := \frac{1}{1-\beta^2}} + \frac{(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2}{\beta^2} \underbrace{\int_{-1}^{+1} dz \, \frac{2(1-\beta z)\beta z - \frac{(\beta^2-1)(1-z^2)}{2} + (\beta^2-1) z^2}{(1-\beta z)^5}}_{\frac{4}{3}\gamma^6\beta^2} \right\}$$

Bemerke: $\quad (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})\cdot(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}) = \beta^j \dot{\beta}^k \beta^l \dot{\beta}^m \,(\delta^{jl}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{kl}) = \beta^2\dot{\beta}^2 - (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2$

$\Rightarrow \quad (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2 = \beta^2\dot{\beta}^2 - |\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}|^2$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \frac{2q^2}{3c}\gamma^6 \left\{ \dot{\beta}^2 (1-\beta^2) + \beta^2\dot{\beta}^2 - |\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}|^2 \right\} = \boxed{\frac{2q^2}{3c}\gamma^6 \left(\dot{\beta}^2 - |\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}|^2 \right)}$$

Drücken wir das Ergebnis mittels der Kraft aus, die das Teilchen beschleunigt:

$$\vec{F}_\circ = \frac{d\, m\vec{u}}{dt_\circ} = m \frac{d}{dt_\circ} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = m \left\{ \frac{\dot{\vec{v}}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{2\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}}{c^2}}{\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}} \vec{v} \right\}$$

$$= mc\gamma \left\{ \dot{\vec{\beta}} + \vec{\beta}\, \gamma^2 \vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}} \right\}$$

Nicht direkt anwendbar, aber in zwei Spezialfällen schon:

(i) $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$ $\Rightarrow$ $P_\circ = \frac{2q^2}{3c} \gamma^6 \dot{\beta}^2$; $\vec{F}_\circ = mc\gamma \dot{\vec{\beta}} \left\{ 1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \right\}$

$$= mc\gamma^3 \dot{\vec{\beta}}$$

$$\Rightarrow P_\circ = \frac{2q^2}{3m^2c^3} \vec{F}_\circ^{\,2}$$

(ii) $\vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}}$ $\Rightarrow$ $P_\circ = \frac{2q^2}{3c} \gamma^6 \dot{\beta}^2 (1-\beta^2) = \frac{2q^2}{3c} \gamma^4 \dot{\beta}^2$

$$\vec{F}_\circ = mc\gamma \dot{\vec{\beta}}$$

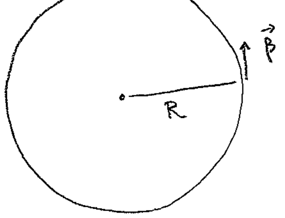
$$\Rightarrow P_\circ = \frac{2q^2}{3m^2c^3} \gamma^2 \vec{F}_\circ^{\,2}$$

Anwendungen:

(1) $P_\circ$ und $\frac{dP_\circ}{d\Omega}$ sind unabhängig vom Vorzeichen von $\dot{\vec{\beta}}$ bzw $\vec{F}_\circ$.

Falls ein Teilchen in Materie stößt und dort von Wechselwirkungen gebremst wird, sprechen wir von Bremsstrahlung. Dies ist ein wichtiger Begriff — dasselbe Wort in Englisch!

(2) In einem kreisförmigen Beschleuniger („Speicherring"), mit $\vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}}$, geht mehr Energie als Synchrotonstrahlung verloren als in einem „Linearbeschleuniger", mit $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$.



$$\vec{r}^{\,2} = \text{const} \quad \Big| \tfrac{d}{dt}$$
$$\Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{v} = 0 \quad \Big| \tfrac{d}{dt}$$
$$\Rightarrow v^2 + \vec{r}\cdot\dot{\vec{v}} = 0$$
$$\vec{v}^{\,2} = \text{const} \quad \Big| \tfrac{d}{dt}$$
$$\Rightarrow \vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = 0$$

$$\Rightarrow |\dot{\vec{v}}| = \frac{v^2}{R} \quad (= \omega^2 R)$$

Winkel-geschwindigkeit

Für $v \approx c$ gilt also $P_\circ \approx \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4 \left(\frac{c^2}{R}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{2cq^2}{3R^2} \cdot \gamma^4}}$

— o —