2.3 Feld einer Punktladung [LL II § 62-64]

Wenn die rechte Seite der inhomogenen Maxwell-Gleichungen (d.h. $\frac{4\pi}{c} J^\mu$) eine gegebene Funktion ist, die nicht „dynamisch" von der Feldlösung beeinflusst wird (d.h. Lorentz-Kraft verschwindet, entweder weil es nur eine Punktladung gibt, oder weil andere Kräfte die Lorentz-Kraft ausgleichen), handelt es sich um lineare inhomogene partielle Differentialgleichungen. In diesem Fall kann (im Gegensatz zur Hydrodynamik) immer eine explizite Lösung gegeben werden. Wir tun dies mit Hilfe von Greenschen Funktionen.

In Lorenz-Eichung ($\partial_\mu A^\mu = 0$):

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A^\mu(x^0, \vec{x}) = \frac{4\pi}{c} J^\mu(x^0, \vec{x})$$

Suche nach einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung (welche aber nicht eindeutig ist; vgl. später.)

Eine Greensche Funktion erfülle die Gleichung

$$\partial^\mu \partial_\mu G(x^0, \vec{x}) = 4\pi\, \delta(x^0)\, \delta^{(3)}(\vec{x}) \qquad (G)$$

Folglich stellt

$$A^\mu(x^0, \vec{x}) := \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dx^{0\prime} \int d^3\vec{x}'\; G(x^0 - x^{0\prime}, \vec{x} - \vec{x}')\, J^\mu(x^{0\prime}, \vec{x}')$$

die gesuchte Lösung dar:

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dx^{0\prime} \int d^3\vec{x}' \cdot 4\pi \cdot \delta(x^0 - x^{0\prime})\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')\, J^\mu(x^{0\prime}, \vec{x}') = \frac{4\pi}{c} J^\mu(x^0, \vec{x}).$$

Löse (G) mit Hilfe von Fourier-Darstellung:

$$G(x) := \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \tilde{G}(k)\, e^{-ik\cdot x} \quad ; \; k\cdot x = k^0 x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x} = k_\mu x^\mu = k^\mu x_\mu$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{G}(k) = \int d^4x\; G(x)\, e^{ik\cdot x}$$

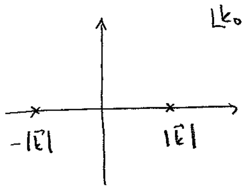
$$\int d^4x\, e^{iq\cdot x} \left\{ \partial^\mu \partial_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \tilde{G}(k)\, e^{-ik\cdot x} = 4\pi\, \delta^{(4)}(x) \right\} \quad \Bigg| \; \int d^4x\, e^{i(q-k)\cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q-k)$$

$$\Rightarrow \quad -q^2\, \tilde{G}(q) = 4\pi$$

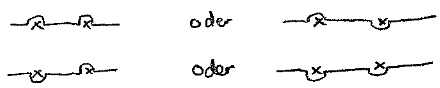
$$\Rightarrow \quad G(x) = -4\pi \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2}$$

Aber: das Integral ist (in Minkowski-Raumzeit) wegen Pole nicht eindeutig definiert:

$$G(x) = -4\pi \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi}\, \frac{e^{-ik^0 x^0}}{(k^0 - |\vec{k}|)(k^0 + |\vec{k}|)}$$



Soll man dies als



oder oder oder interpretieren?

Die Polbeiträge entsprechen unterschiedlicher Lösungen der homogenen Gleichung.

Bemerke : $e^{-ik^0x^0} = e^{-i\left[\mathrm{Re}(k^0)+i\,\mathrm{Im}(k^0)\right]x^0} = e^{-i\,\mathrm{Re}(k^0)x^0}\,e^{\mathrm{Im}(k^0)x^0}$.

D.h., für $x^0>0$ ist es möglich, die Kontour in der unteren Halbebene ($\mathrm{Im}(k^0)<0$) zu schließen; für $x^0<0$, in der oberen Halbebene ($\mathrm{Im}(k^0)>0$).

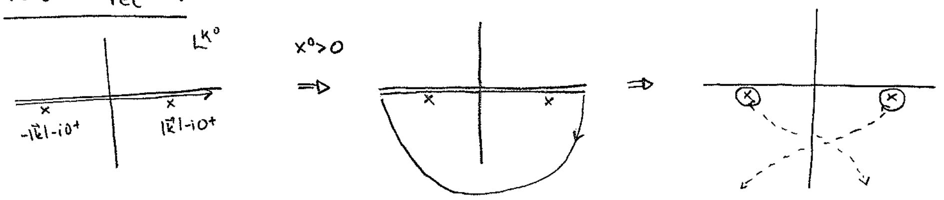
(weil $e^{\mathrm{Im}(k^0)x^0}$ exponentiell klein wird)

Wenn wir die Interpretation wählen, welches durch

$$G_{ret}(x) := -4\pi\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk^0}{2\pi}\,\frac{e^{-ik^0x^0}}{(k^0+i0^+-|\vec{k}|)(k^0+i0^++|\vec{k}|)}$$

mathematisch definiert werden kann, erhalten wir also eine spezielle „retardierte" Funktion, die nur für $x^0>0$ nichtverschwindend ist. Dieses entspricht der Kausalität der Strahlung.

Die Bestimmung von $G_{ret}(x)$:



$$G_{ret}(x) \overset{x^0>0}{=} -4\pi\cdot\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\frac{(-2\pi i)}{2\pi}\cdot\left\{\frac{e^{-i|\vec{k}|x^0-x^00^+}}{2|\vec{k}|}+\frac{e^{i|\vec{k}|x^0-x^00^+}}{-2|\vec{k}|}\right\}$$

$k:=|\vec{k}|$

$$= \frac{2\pi i}{(2\pi)^3}\,2\pi\cdot\int_0^\infty dk\,k\int_{-1}^{+1}d(\cos\theta)\,e^{ik|\vec{x}|\cos\theta}\left\{e^{-ikx^0}-e^{ikx^0}\right\}$$

$$= \frac{i}{2\pi i|\vec{x}|}\int_0^\infty dk\left\{e^{ik|\vec{x}|}-e^{-ik|\vec{x}|}\right\}\left\{e^{-ikx^0}-e^{ikx^0}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi|\vec{x}|}\int_0^\infty dk\left\{e^{ik(|\vec{x}|-x^0)}-e^{ik(|\vec{x}|+x^0)}+e^{-ik(|\vec{x}|-x^0)}-e^{-ik(|\vec{x}|+x^0)}\right\}$$

$\int_0^\infty dk\,f(-k) = -\int_0^{-\infty} d(-k)\,f(-k) \overset{-k\to k}{=} \int_{-\infty}^0 dk\,f(k)$

$$= \frac{1}{2\pi|\vec{x}|}\int_{-\infty}^{\infty}dk\left\{e^{ik(|\vec{x}|-x^0)}-e^{ik(|\vec{x}|+x^0)}\right\}$$

$$= \frac{1}{|\vec{x}|}\left\{\delta(|\vec{x}|-x^0)-\underbrace{\delta(|\vec{x}|+x^0)}_{\text{für } x^0>0 \text{ nicht realisierbar}}\right\}$$

Und für $x^0<0$ ist $G_{ret}=0$

$$\Rightarrow G_{ret}(x) = \frac{\theta(x^0)}{|\vec{x}|}\,\delta(|\vec{x}|-x^0)$$

$\delta(az)=\frac{1}{|a|}\delta(z)$

$$= 2\,\theta(x^0)\,\delta\big((|\vec{x}|-x^0)\underbrace{(|\vec{x}|+x^0)}_{2|\vec{x}|\,!}\big)$$

$$\boxed{= 2\,\theta(x^0)\,\delta(x^2)}$$

Lorentz-invariant!

Sei jetzt J^μ der 4-Strom einer Punktladung, mit Bahnkurve $\vec r(t)$:

$$J^\mu(t,\vec x) = \begin{pmatrix} c\varrho \\ \vec j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c q\, \delta^{(3)}(\vec x - \vec r(t)) \\ \dot{\vec r}(t)\, q\, \delta^{(3)}(\vec x - \vec r(t)) \end{pmatrix}$$

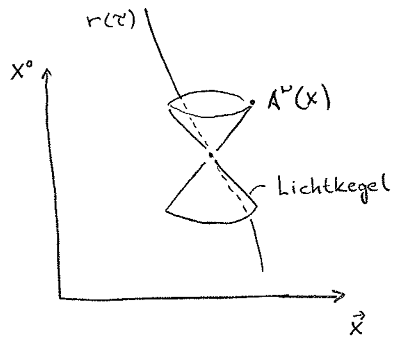
$$J^\mu(x^0,\vec x) = c q \int dt \begin{pmatrix} c\,\delta(x^0-ct)\,\delta^{(3)}(\vec x - \vec r(t)) \\ \dot{\vec r}(t)\,\delta(x^0-ct)\,\delta^{(3)}(\vec x - \vec r(t)) \end{pmatrix} \quad ; \quad dt = d\tau \cdot \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec r}^2}{c^2}}}}$$

$$= c q \int d\tau\, u^\mu(\tau)\, \delta^{(4)}(x - r(\tau)) \quad ; \quad r := \begin{pmatrix} ct \\ \vec r(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^\mu(x) = q \int d^4x'\, G_{ret}(x-x') \int d\tau\, u^\mu(\tau)\, \delta^{(4)}(x' - r(\tau))$$

$$= 2q \int d\tau\, u^\mu(\tau) \int d^4x'\, \Theta(x^0-x'^0)\,\delta((x-x')^2)\,\delta^{(4)}(x'-r(\tau))$$

$$= 2q \int d\tau\, u^\mu(\tau)\, \Theta(x^0 - r^0(\tau))\, \delta((x-r(\tau))^2) .$$



Es gibt also einen Beitrag nur wenn $(x-r(\tau))^2 = 0$, d.h. $x - r(\tau)$ ist „lichtartig" (und $x^0 > r^0(\tau)$).

Sei τ_0 die Eigenzeit bei der ein solches Signal gesendet wird.

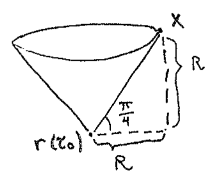
Falls $f(\tau) = 0$ bei $\tau = \tau_0$, gilt $\delta(f(\tau)) = \frac{1}{|f'(\tau)|}\Big|_{\tau=\tau_0} \delta(\tau - \tau_0)$.

Jetzt ist $f = (x_\mu - r_\mu(\tau))(x^\mu - r^\mu(\tau))$; $\frac{df}{d\tau} = -2 \frac{dr^\mu}{d\tau}(x_\mu - r_\mu(\tau)) = -2\, u\cdot(x - r(\tau))$;

$$u\cdot(x - r(\tau)) \underset{\text{Ruhesystem des Teilchens}}{=} c\,(x^0 - r^0(\tau)) > 0 .$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A^\mu(x) = \frac{q\, u^\mu(\tau_0)}{u(\tau_0)\cdot(x - r(\tau_0))}}$$

„Liénard-Wiechert-Potential"



Bezeichne: $R := |\vec x - \vec r(\tau_0)| \overset{\text{Lichtkegel}}{=} x^0 - r^0(\tau_0)$

$u := c\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec\beta \end{pmatrix}$; $\vec\beta := \frac{\vec v}{c}\Big|_{\tau=\tau_0}$

$\vec n := \frac{\vec x - \vec r(\tau_0)}{R}$

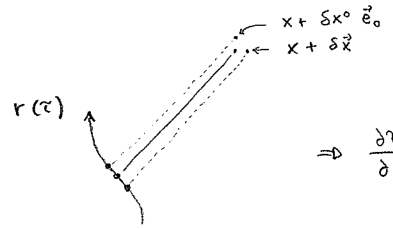
$$\Rightarrow \quad u(\tau_0)\cdot(x - r(\tau_0)) = c\gamma\,(R - \vec\beta\cdot\vec n\, R)$$

Also:

$$\boxed{\phi(x) = \frac{q}{R\,(1 - \vec\beta\cdot\vec n)} \quad ; \quad \vec A(x) = \frac{q\vec\beta}{R\,(1-\vec\beta\cdot\vec n)}}$$

$\vec E$ und $\vec B$

Die Bestimmung der eichinvarianten Größen $\vec E = -\nabla\phi - \partial_0 \vec A$, $\vec B = \nabla\times\vec A$ ist leider kompliziert, weil τ_0 und folglich $R, \vec\beta, \vec n$ implizit von x^0 und $\vec x$ abhängig sind.



$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\tau_0}{\partial x^0}\neq 0, \quad \nabla\tau_0\neq 0 .$$

$\boxed{\frac{\partial \tau_0}{\partial x^0}}$:

Aus $R = \overset{(i)}{|\vec x - \vec r(\tau_0)|} = \overset{(ii)}{x^0 - r^0(\tau_0)}$:

$$(i) \quad \frac{\partial R^2}{\partial x^0} = 2\sum_i (x^i - r^i(\tau_0))\cdot\left(-\frac{dr^i}{d\tau_0}\right)\cdot\frac{\partial\tau_0}{\partial x^0} = -2R\,\vec n\cdot\vec u\, \frac{\partial \tau_0}{\partial x^0}$$

$$(ii) \quad \frac{\partial R^2}{\partial x^0} = 2(x^0-r^0(\tau_0))\left(1-\frac{dr^0}{d\tau_0}\frac{\partial\tau_0}{\partial x^0}\right) = 2R\left(1-u^0\frac{\partial\tau_0}{\partial x^0}\right)$$

$$(i)=(ii) \quad \Rightarrow \quad u^0\frac{\partial\tau_0}{\partial x^0} - 1 = \vec n\cdot\vec u\,\frac{\partial\tau_0}{\partial x^0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\tau_0}{\partial x^0} = \frac{1}{u^0(1-\vec\beta\cdot\vec n)}$$

$\boxed{\nabla\tau_0}$:

$$(i) \quad \nabla R^2 = 2\sum_{i,j}(x^i - r^i(\tau_0))\,\vec e_j\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j} - \frac{dr^i}{d\tau_0}\frac{\partial\tau_0}{\partial x^j}\right) = 2R(\vec n - \vec n\cdot\vec u\,\nabla\tau_0)$$

$$(ii) \quad \nabla R^2 = 2R\left(-\frac{dr^0}{d\tau^0}\nabla\tau_0\right) = -2Ru^0\nabla\tau_0$$

$$(i)=(ii) \quad \Rightarrow \quad \vec n\cdot\vec u\,\nabla\tau_0 - \vec n = u^0\nabla\tau_0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\tau_0 = \frac{-\vec n}{u^0(1-\vec\beta\cdot\vec n)}$$

Als Beispiel bestimmen wir jetzt den Teil von $\vec E$ der proportional zu $\dot{\vec\beta}$ (Beschleunigung) ist:

$$* \quad -\nabla\phi = \frac{q}{R(1-\vec\beta\cdot\vec n)^2}(-\dot{\vec\beta}\cdot\vec n)\underbrace{\frac{dt^0}{d\tau_0}}_{\frac{1}{c}u^0}\nabla\tau_0 = \frac{q}{cR(1-\vec\beta\cdot\vec n)^3}\,\dot{\vec\beta}\cdot\vec n\,\vec n$$

$$* \quad -\partial_0\vec A = \frac{q}{R(1-\vec\beta\cdot\vec n)}\left(-\dot{\vec\beta}\,\frac{dt^0}{d\tau_0}\frac{\partial\tau_0}{\partial x^0}\right) + \frac{q\vec\beta}{R(1-\vec\beta\cdot\vec n)^2}(-\dot{\vec\beta}\cdot\vec n)\frac{dt^0}{d\tau_0}\frac{\partial\tau_0}{\partial x^0}$$

$$= \frac{q}{cR(1-\vec\beta\cdot\vec n)^3}\left\{-\dot{\vec\beta}(1-\vec\beta\vec n) - \vec\beta\,\dot{\vec\beta}\cdot\vec n\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec E = \frac{q}{cR(1-\vec\beta\cdot\vec n)^3}\left\{\dot{\vec\beta}\cdot\vec n(\vec n-\vec\beta) - \dot{\vec\beta}(1-\vec\beta\cdot\vec n)\right\}_{\tau=\tau_0} + (\text{Terme ohne } \dot{\vec\beta})}$$

(Eine andere Schreibweise:

$$\vec n\times[(\vec n-\vec\beta)\times\dot{\vec\beta}] \overset{\text{Summenkonvention}}{=} \vec e_i\, \varepsilon^{ijk} n^j \varepsilon^{klm}(n^l-\beta^l)\dot\beta^m$$

$$= \vec e_i\, n^j (n^l - \beta^l)\dot\beta^m(\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl})$$

$$= (\vec n-\vec\beta)\,\vec n\cdot\dot{\vec\beta} - \dot{\vec\beta}(\underbrace{\vec n\cdot\vec n}_{1} - \vec n\cdot\vec\beta) = \{\dots\}.$$

)