2.2 Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik [LL II § 27-33]

Wir wollen die Grundgleichungen der Elektrodynamik (Kap. 2.1) mittels des Lagrange-Formalismus ausdrücken; dieses soll es ermöglichen, die verschiedenen Symmetrien und Erhaltungssätze leichter zu identifizieren.

Punktladung im elektromagnetischen Feld

Ohne Feld (Seite 52):
$$\underset{\text{„Materie"}}{S = S_m} = -mc^2\int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau = -mc^2\int_{t_a}^{t_b} dt\,\sqrt{1-\left(\frac{\dot{x}(t)}{c}\right)^2}\,.$$

Behauptung: Wechselwirkung von Feld und Materie (vorerst: Lorentz-Kraft) kann mit
$$S_{mf} := -\frac{q}{c}\int_a^b dx_\mu\, A^\mu(x) = -\frac{q}{c}\int_{t_a}^{t_b} dt\,\frac{dx_\mu}{dt}\,A^\mu(x)$$
beschrieben werden.

Bemerkungen:

* Lorentz-Invarianz: $S_{mf} = -\frac{q}{c}\int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau\, u_\mu A^\mu$. ok!
* Eichinvarianz:
$$S'_{mf} = -\frac{q}{c}\int_a^b dx_\mu A^\mu + \frac{q}{c}\int_a^b dx_\mu \partial^\mu \chi = S_{mf} + \frac{q}{c}\Big[\chi(x(t))\Big]_{t_a}^{t_b}$$
Theorie I: ein Oberflächenterm spielt in S keine Rolle (dort wird nicht variiert) $\Rightarrow$ OK!

Beweis:
$$L = L_m + L_{mf}$$
$$= -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^i\dot{x}^i}{c^2}} - \frac{q}{c}\left(cA^0 - \dot{x}^i A^i\right)$$

„kanonischer Impuls"
$$p^i := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} + \frac{q}{c}A^i \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x^i} = -q\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{q}{c}\dot{x}^j\frac{\partial A^j}{\partial x^i}$$

„kinetischer Impuls"
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\right) = q\left[-\frac{\partial A^i}{c\,\partial t} - \frac{\dot{x}^j}{c}\frac{\partial A^i}{\partial x^j} - \frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{\dot{x}^j}{c}\frac{\partial A^j}{\partial x^i}\right]$$
$$= q\Big[\underbrace{-\partial_i\phi - \partial_0 A^i}_{\text{Seite 50: } E^i} + \frac{\dot{x}^j}{c}\underbrace{\left(\partial^j A^i - \partial^i A^j\right)}_{\text{Seite 51: } F^{ji} = \varepsilon^{ijk}B^k}\Big]$$
(Seite 50)

$$\Leftrightarrow \frac{d(mu^i)}{dt} = q\left[\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right]^i \qquad \text{ok!}$$

Verallgemeinerung:

Für viele Teilchen:
$$S_{mf} \to -\frac{1}{c}\int_{t_a}^{t_b} dt\,\sum_a q_a \begin{pmatrix} c \\ \vec{v}_a(t)\end{pmatrix}\cdot A(t,\vec{x}_a(t))$$
$$= -\frac{1}{c}\int_{t_a}^{t_b} dt\int d^3\vec{x}\,\sum_a q_a\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_a(t))\begin{pmatrix} c \\ \vec{v}(t,\vec{x})\end{pmatrix}\cdot A(t,\vec{x})$$

$dt = \frac{dx^0}{c}$; Seite 49, 50
$$= \boxed{-\frac{1}{c^2}\int d^4x\, J_\mu(x)\,A^\mu(x)}$$

Bemerkungen:

* Lorentz-Invarianz: $d^4x' = d^4x \underbrace{|\det(\Lambda)|}_{1\,!} \Rightarrow$ OK!

* Eichinvarianz:

$$S'_{mf} = S_{mf} + \frac{1}{c^2}\int d^4x \underbrace{J_\mu \partial^\mu \chi}_{\partial^\mu(J_\mu \chi) - \chi \underbrace{\partial^\mu J_\mu}_{0}} \qquad \text{OK!}$$

↳ Gauß ⇒ Oberflächenterm

Elektromagnetisches Feld mit Quellen

Um auch die Maxwell-Gleichungen durch den Lagrange-Formalismus darzustellen, brauchen wir eine Verallgemeinerung des Letzteren für Felder (Freiheitsgrad $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^4$ statt $q(t)$, $t \in \mathbb{R}$).

Bis jetzt: $S = \int dt\, L(q, \dot{q})$; L = Lagrange-Funktion.

Neu: $S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$; $\mathcal{L}$ = Lagrange-Dichte.

Das Hamiltonsche Prinzip bleibt unverändert:

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\, \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\, \delta(\partial_\mu \Phi) \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \delta\Phi \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \right]}_{\text{Euler-Lagrange für Felder:}} + \underbrace{\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\, \delta\Phi \right]}_{\text{Gauß} \Rightarrow \text{Oberfläche}} \right\}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) = 0} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^4$$

Behauptung: Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen sind in

$$S_{mf} + S_f \;;\; \boxed{S_f := -\frac{1}{16\pi c}\int d^4x\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}$$

enthalten. (Die homogenen sind mit $F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ automatisch erfüllt.)

Bemerkung: S_f ist offensichtlich sowohl Lorentz- als auch eichinvariant.

Beweis:

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi c} \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{2}{8\pi c} \cdot F^{\mu\nu} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{mf}}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{c^2} J^\nu$$

$$\frac{\partial(\mathcal{L}_{mf} + \mathcal{L}_f)}{\partial A_\nu} = \partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}_{mf} + \mathcal{L}_f)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) \quad \forall\, \nu$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu} \qquad \text{OK!}$$

Als Anwendung des Lagrange-Formalismus leiten wir den Energieimpulstensor $T^{\mu\nu}$ her. (Das Argument hier ist einigermaßen „abstrakt" und schlampig; um so schöner und einfacher ist das Endergebnis!)

* Noether-Theorem: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ folgt aus Invarianz in 4-Translationen.

  Wenn also $x^\nu \to x^{\nu'} := x^\nu + a^\nu$, dann ist $S' = S + \int d^4x\, a^\nu f_\nu + \ldots \overset{!}{=} S$,
  d.h. wir könnten erwarten, dass an der Stelle von f_ν die Funktion $\partial^\mu T_{\mu\nu}$, mal Konstante auftritt.

* Das Obige funktioniert etwas besser, wenn wir a^ν x-abhängig wählen.
  Falls wir nämlich S so konstruieren, dass S invariant ist, dann gilt wieder

$$S' = S + \alpha \int d^4x\, a^\nu(x)\, \partial^\mu T_{\mu\nu}(x) + \ldots$$
$$= S - \alpha \int d^4x\, [\partial^\mu a^\nu(x)]\, T_{\mu\nu}(x) + \ldots$$

  $T_{\mu\nu} \neq 0$ direkt identifizierbar

* Schreibe:

$$\partial^\mu x^{\nu'} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[x_\alpha \eta^{\alpha\nu} + a^\nu\right] = \eta^{\mu\nu} + \partial^\mu a^\nu .$$

  D.h., $\partial^\mu a^\nu$ funktioniert $\sim$ wie eine Änderung von $\eta^{\mu\nu}$.

* Die Idee: Ersetze $\eta^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu}$; $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$.
  Konstruiere S so dass sie in einer allgemeinen Transformation

$$O^{\alpha\ldots} \to \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} O^{\beta\ldots}$$
$$Q_\gamma \to \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\gamma'}} Q_{\delta\ldots}$$

  invariant bleibt.

  Dann gilt:

$$\boxed{T_{\mu\nu}(x) = 2c \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)} S \Big|_{g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}}}$$

  (richtiger Wert von α).

* Konstruktion:

  * Ersetze in Skalarprodukten $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$ (besser: $\eta^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu}$). Skalarprodukte bleiben dann invariant:

$$a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu \to g_{\gamma\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\mu'}} \underbrace{\frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha}}_{\delta^\delta{}_\alpha} a^\alpha \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} b^\beta = g_{\beta\alpha} a^\alpha b^\beta .$$

$$\delta^\gamma{}_\beta$$

  * Integrationsmaß ist nicht invariant:

$$d^4x \to d^4x' = d^4x \left|\det \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}\right|$$

  $\det(g^{\mu\nu})$ ist auch nicht invariant:

$$\det(g^{\mu\nu}) \to \det(g^{\mu\nu'}) = \det\left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta}\right) = \det(g^{\alpha\beta}) \left|\det \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha}\right|^2 .$$

  $\Rightarrow$ Ersetze Integrationsmaß durch $d^4x\,[-\det(g^{\mu\nu})]^{-\frac{1}{2}}$!

  weil $\det \eta = (1)(-1)^3 = -1$.

  Dieses Maß ist invariant.

Beispiel 1:

$$S_{mf}+S_f \to \int d^4x \frac{1}{\sqrt{-\det g^{\mu\nu}}}\left[-\frac{1}{2c^2}\, g^{\mu\nu}\left(J_\mu A_\nu + J_\nu A_\mu\right) - \frac{1}{16\pi c}\, g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\, F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta}\right]$$

$$g=\eta+\delta g = \eta\left(1+\eta^{-1}\delta g\right) \Rightarrow \det g = \det\eta\left(1+\mathrm{Tr}[\eta^{-1}\delta g]\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-\det g}} = 1-\frac12\eta_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}\frac{1}{\sqrt{-\det g^{\mu\nu}}}\Big|_{g=\eta} = -\frac12\eta_{\mu\nu}$$

Also:

$$T_{\mu\nu} = 2c\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S = \eta_{\mu\nu}\left[\frac1c J_\alpha A^\alpha + \frac{1}{16\pi}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right] - \frac1c\left(J_\mu A_\nu + J_\nu A_\mu\right) - \frac{1}{4\pi}F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha\right]}_{\text{wie auf Seite 52 !}} + \underbrace{\frac1c\left[\eta_{\mu\nu}J_\alpha A^\alpha - J_\mu A_\nu - J_\nu A_\mu\right]}_{?\quad (\text{nicht eichinvariant!})}$$

Check: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = ?$

Feldteil:

$$\frac{1}{4\pi}\Big[\underbrace{\frac12 F_{\alpha\beta}\underbrace{\partial^\nu F^{\alpha\beta}}_{-\partial^\alpha F^{\beta\nu}-\partial^\beta F^{\nu\alpha}} - F^\mu{}_\alpha\,\partial_\mu F^{\nu\alpha}}_{-\frac12 F_{\alpha\beta}\partial^\alpha F^{\beta\nu} + \frac12 F_{\alpha\beta}\partial^\beta F^{\alpha\nu} + F_{\mu\alpha}\partial^\mu F^{\alpha\nu} = 0} - F^{\nu\alpha}\underbrace{\partial_\mu F^\mu{}_\alpha}_{\frac{4\pi}{c}J_\alpha}\Big]$$

homogene und inhomogene Maxwell-Gleichungen

$$= -\frac1c F^{\nu\alpha}J_\alpha$$

Stromteil:

$$+\frac1c\Big[(\partial^\nu J_\mu)A^\mu + \underbrace{J_\mu\partial^\nu A^\mu - \underbrace{(\partial_\mu J^\mu)}_{0}A^\nu - J^\mu\partial_\mu A^\nu}_{+\frac1c F^{\nu\mu}J_\mu} - (\partial_\mu J^\nu)A^\mu - J^\nu\partial_\mu A^\mu\Big]$$

$$= +\frac1c F^{\nu\alpha}J_\alpha \quad + \frac1c\left[A^\mu\partial^\nu J_\mu - A^\mu\partial_\mu J^\nu - J^\nu\partial_\mu A^\mu\right] \Big\}?$$

Fazit: Funktioniert schön ohne J^μ. Falls J^μ existiert, können wir aber den Materieteil S_m offensichtlich nicht vernachlässigen. Die Schwierigkeit dabei ist, dass wir momentan S_m nicht als $\int d^4x\, \mathcal{L}_m$ ausdrücken können, und deshalb die Formel $T_{\mu\nu} = 2c\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$ nicht nutzbar ist $\Rightarrow$ Quantenfeldtheorie!

Beispiel 2:

Für ein „Skalarfeld":

$$S := \int d^4x \frac{1}{\sqrt{-\det g^{\mu\nu}}}\left\{\frac{f^2\hbar^2}{mc}\cdot\frac12\partial^\mu\alpha\,\partial_\mu\alpha\right\}$$

$$\Rightarrow T_{\mu\nu} = \frac{f^2\hbar^2}{m}\left[\partial_\mu\alpha\,\partial_\nu\alpha - \eta_{\mu\nu}\left(\frac12\partial^\delta\alpha\,\partial_\delta\alpha\right)\right]$$

$\Rightarrow$ Seite 44 !