2. Elektrodynamik einer Punktladung [Fließbach, Elektrodynamik, Kap. 17-19, 22-23]

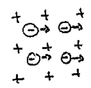
2.1 Grundlagen (Wiederholung Theorie I) [LL II § 16-18, 23-25]

Variablen: * Alte Symbole, neue Bedeutungen: $\rho :=$ Ladungsdichte

$$:= \sum_a q_a n_a \quad ; \quad q_a = \begin{matrix} +e & (p^+) \\ -e & (e^-) \end{matrix}$$

$\vec{j} :=$ Stromdichte

$$:= \sum_a q_a n_a \vec{v}_a$$

Notabene: $\vec{j} \neq \rho \vec{v}$ (z.B.  $\rho = (+e-e)n = 0$, $\vec{j} = +en\vec{0} - en\vec{v} \neq 0$)

* Elektrisches Feld $\vec{E}(t,\vec{x})$; magnetische Induktion $\vec{B}(t,\vec{x})$.

Gleichungen:

* Kontinuitätsgleichung: $\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$. (K)

* Maxwell-Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho && \text{(MI)} \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} && \text{(MII)} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} &= 0 && \text{(MIII)} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 && \text{(MIV)} \end{aligned} \right.$$

„Quellen erzeugen Felder"

* Lorentz-Kraftdichte: $\vec{f}_a = q_a n_a \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_a}{c} \times \vec{B} \right)$ (L)

„Felder bewegen Quellen"

Notabene: Diese Gleichungen sind nicht alle unabhängig; so folgt z.B. (K) von (MI) & (MII).

Für eine Punktladung:

$$n_a \to \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a(t))$$
$$\rho \to q_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a(t))$$
$$\vec{j} \to q_a \vec{v}_a(t)\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a(t)).$$

(Check: $\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = -q_a \frac{d\vec{x}_a(t)}{dt} \cdot \nabla \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a(t)) + q_a \vec{v}_a(t) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a(t)) = 0$ ok!)

$$\vec{F}_a = \int d^3x\, \vec{f}_a = q_a \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_a}{c} \times \vec{B} \right).$$

Kovariante Schreibweise:

* $J^\mu := \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$; $\partial_\mu J^\mu = 0$.

* Feldstärketensor: $\begin{cases} F^{i0} := -F^{0i} := E^i \\ F^{ij} := -F^{ji} := -\sum_k \varepsilon^{ijk} B^k \\ F^{00} := F^{ii} := 0 \end{cases}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

* Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad \forall \nu & (\mathrm{M\,I, II}) \\ \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu,\nu,\rho & (\mathrm{M\,III, IV}) \end{cases}$$

* Lorentz-Kraft (für Punktladung):

$$\frac{dp_a^\mu}{d\tau} = \frac{q_a}{c} F^{\mu\nu} u_{a\nu} \quad ; \quad u_a = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v}_a \end{pmatrix}$$

„Dualer" Feldstärketensor:

* In zwei Dimensionen:

$\varepsilon^{12} := \varepsilon_{12} := 1$, $\varepsilon^{ji} := -\varepsilon^{ij}$ $\qquad \varepsilon^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

* In drei Dimensionen:

$\varepsilon^{123} := \varepsilon_{123} := 1$; völlig antisymmetrisch

$$\varepsilon^{ij1}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon^{ij2}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon^{ij3}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* In vier Dimensionen:

$\varepsilon_{0123} := +1$; völlig antisymmetrisch; $\varepsilon^{0123} = -1$!

* $\tilde{F}_{\mu\nu}$:= dualer Feldstärketensor := $\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & -E^3 & E^2 \\ B^2 & E^3 & 0 & -E^1 \\ B^3 & -E^2 & E^1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_{1320} = -\varepsilon_{0321} = \varepsilon_{0123} = +1$

$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$!

* Mit $\tilde{F}_{\mu\nu}$ können die homogenen Maxwell-Gleichungen einfacher ausgedrückt werden:

$$\partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0 \quad \Big| \tfrac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\mu\nu\rho}$$

$$\Rightarrow \partial^\mu \tilde{F}_{\alpha\mu} + \partial^\nu \tilde{F}_{\alpha\nu} + \partial^\rho \tilde{F}_{\alpha\rho} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \forall \nu}$$

Potentiale: Die homogenen Maxwell-Gleichungen können durch die Einführung eines 4-Potentials $A^\mu = \begin{pmatrix}\phi \\ \vec{A}\end{pmatrix}$ gelöst werden.

Sei $\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$.

D.h.: $$E^i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i$$
$$\Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$
$$B^i = -\frac{1}{2}\sum_{jk}\varepsilon^{ijk}F^{jk} = -\varepsilon^{ijk}\partial^j A^k = +\varepsilon^{ijk}\partial_j A^k$$
$$\Leftrightarrow \quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}.$$

Dann gilt:
$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\lambda}F^{\varrho\lambda} = \varepsilon_{\mu\nu\varrho\lambda}\partial^\varrho A^\lambda$$
$$\Rightarrow \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = \underbrace{\varepsilon_{\mu\nu\varrho\lambda}}_{\text{antisymmetrisch in } \mu\leftrightarrow\varrho}\underbrace{\partial^\mu\partial^\varrho}_{\text{symmetrisch in } \mu\leftrightarrow\varrho} A^\lambda = 0. \qquad \text{O.K.}$$

Eichinvarianz: Physik, insbesondere $F^{\mu\nu}$, bleibt unverändert in der Transformation
$$A^\mu \to A^{\mu\prime} := A^\mu - \partial^\mu\chi,$$
wobei $\chi\in\mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist:
$$F^{\mu\nu\prime} = \partial^\mu A^{\nu\prime} - \partial^\nu A^{\mu\prime} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \underbrace{- \partial^\mu\partial^\nu\chi + \partial^\nu\partial^\mu\chi}_{=0} = F^{\mu\nu}.$$

Für praktische Berechnungen kann deshalb eine angemessene Eichbedingung bzw. Eichung gewählt werden.

Zum Beispiel in der Lorenz-Eichung gilt $\partial_\mu A^\mu = 0$, wobei die inhomogenen Maxwell-Gleichungen die folgende Form erhalten:
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu\underbrace{(\partial_\mu A^\mu)}_{0} = \boxed{\underbrace{\Box}_{\partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2} A^\nu = \frac{4\pi}{c}J^\nu.}$$

Energieimpulstensor

* Energiedichte des Feldes: $e_{em} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)$
* Energiestromdichte: $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$ („Poynting-Vektor")
* Impulsdichte: $\vec{g}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}\vec{E}\times\vec{B}$
* Impulsstromdichte: $\tau_{em}^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{8\pi}(\vec{E}^2+\vec{B}^2) - \frac{1}{4\pi}(E^iE^j + B^iB^j)$

(„Spannungstensor"; Vorzeichenkonvention nicht universell!)

Seite 6: $T^{io}_{em} = T^{oi}_{em} = \dfrac{\text{Energiestromdichte}}{c} = \text{Impulsdichte} \cdot c$; $T^{oo}_{em} = e_{em}$; $T^{ij}_{em} = \sigma^{ij}_{em}$

Desweiteren: $F^{\mu\alpha} F^{\nu}{}_{\alpha} =$

$(\mu=0, \nu=0)$ $\quad -\vec{E}^2$

$(\mu=0, \nu=i)$ $\quad \left.\begin{array}{ll} -E^2B^3 + E^3B^2 & \text{für } i=1 \\ E^1B^3 - E^3B^1 & i=2 \\ -E^1B^2 + E^2B^1 & i=3 \end{array}\right\} -(\vec{E}\times\vec{B})^i$

$(\mu=i, \nu=j)$ $\quad E^iE^j - F^{ik}F^{jk}$

$$= E^iE^j - \underbrace{\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jkm}}_{\delta^{ij}\delta^{lm} - \delta^{im}\delta^{jl}} B^l B^m = E^iE^j + B^iB^j - \delta^{ij}\vec{B}^2$$

$$F^{\mu\alpha}F_{\mu\alpha} = -\vec{E}^2 - \vec{E}^2 - \vec{B}^2 + 3\vec{B}^2 = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$$

Vergleich mit Seite 51 gibt jetzt:

$$T^{\mu\nu}_{em} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} + \frac{1}{16\pi}\eta^{\mu\nu} \cdot F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha}\right]$$

Lagrange-Formalismus

* Wirkung S (4-Skalar) sei extremal, $\delta S = 0$.
* $S = \int_{t_a}^{t_b} dt \, L(q, \dot{q}, t)$; L = Lagrange-Funktion.

$$\delta S = 0 \implies \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \quad \forall a$$

„Euler-Lagrange-Gleichungen"

* Kanonischer Impuls:

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$$

* Hamilton-Funktion $H := \sum_a \dot{q}_a p_a - L$ entspricht der Energie.
* Ein relativistischer Teilchen:

$$S = -mc^2 \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau \implies L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} \; ; \; \vec{v} = \dot{\vec{x}} \; ;$$

x^i spielen die Rolle von q_a.

$$d\tau = \sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}\, dt$$

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{mv^i}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

$$E = \sum_i p^i \dot{x}^i - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = m \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v^i \end{pmatrix} = m u^\mu .$$
