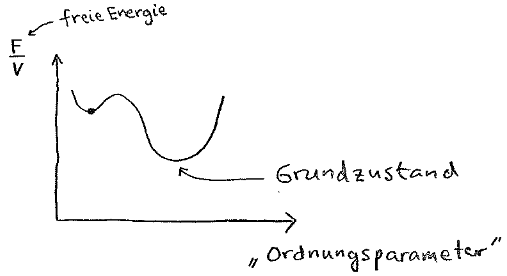
1.12 Hydrodynamik der Phasenübergänge [LL VI § 120-124]

Ein metastabiler Zustand:



Zum Beispiel: * ein verbrennbares Material
(z.B. ein flüssiger Sprengstoff bzw. eine gasförmige $2H_2$-O_2-Mischung):
braucht zusätzliche Wärme (d.h. Entzündung) um Potentialbarriere ($\sim e^{-U_0/k_BT}$) zu überwinden.

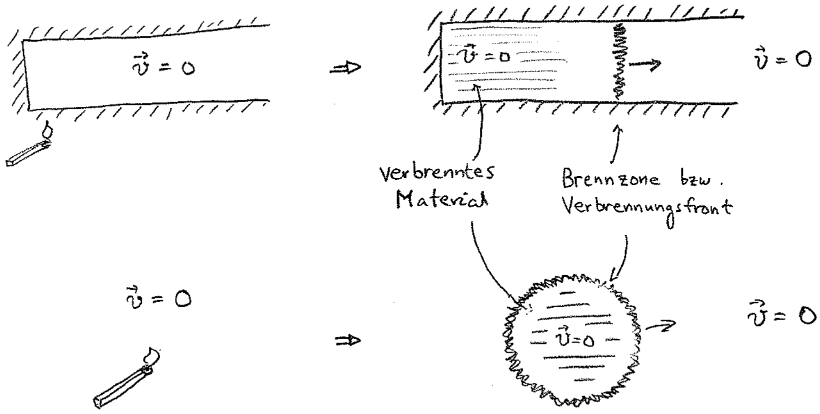
* ein unterkühlter / übersättigter Wasserdampf:
braucht Unreinheiten, um in Wassertropfen zu kondensieren.

Beide Prozesse sind aber exotherme Vorgänge und, einmal in Gang gebracht, transformieren das ganze Medium in den Grundzustand.

Die hydrodynamischen Randbedingungen sind hierbei nichttrivial:

eindimensionaler Fall:

dreidimensionaler Fall:

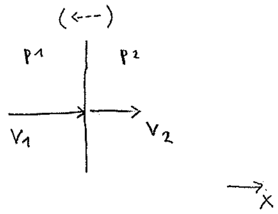


Entropie entsteht nur in der schmalen Verbrennungsfront; anderswo kann die Flüssigkeit als ideal betrachtet werden. Die Verbrennungfront muss dann als eine Unstetigkeitsfläche gesehen werden, wie bei einer Stoßwelle.
Aber Seite 20: $v_1 \neq v_2$ $\Rightarrow$ Wie können die Randbedingungen erfüllt werden?

Um Wiederholung zu vermeiden, benutzen wir dieses Mal den relativistischen Formalismus:

$$\begin{cases} T^{\mu\nu} = -p\,\eta^{\mu\nu} + w\dfrac{u^\mu u^\nu}{c^2} & ; \quad w = \varepsilon + p \quad ; \quad u^\mu = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} ; \ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ N^\mu = n u^\mu & \\ 0 = \partial_\mu N^\mu = \partial_\mu T^{\mu\nu} & \end{cases}$$

Im stationären Ruhesystem der Verbrennungsfront:



$$\partial_\mu T^{\mu 0} = 0 \Rightarrow T_1^{x0} = T_2^{x0} \Rightarrow w_1 \gamma_1^2 v_1 = w_2 \gamma_2^2 v_2 \qquad \text{(Energistrom)}$$

$$\partial_\mu T^{\mu x} = 0 \Rightarrow T_1^{xx} = T_2^{xx} \Rightarrow w_1 \gamma_1^2 v_1^2 + p_1 c^2 = w_2 \gamma_2^2 v_2^2 + p_2 c^2 \qquad \text{(Impulsstrom)}$$

Sei $f := w_1 \gamma_1^2 v_1 > 0$

$$\Rightarrow f v_1 + p_1 c^2 = f v_2 + p_2 c^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{f}{c^2} = \frac{p_2 - p_1}{v_1 - v_2} > 0 .}$$

Es gibt also zwei Möglichkeiten:

(i) $p_2 > p_1 \Rightarrow v_1 > v_2$; „zieht mit", wie bei Stoßwelle.

(ii) $p_2 < p_1 \Rightarrow v_2 > v_1$; „spuckt aus"

Außerdem stehen uns zur Verfügung die Lösungen der idealen Hydrodynamik <u>ohne</u> Verbrennung bzw. Phasenübergang, d.h:

(iii) Stoßwelle, d.h. Unstetigkeit mit $v \gtrsim c_s$.

(iv) Ähnlichkeitsströmung bzw. „<u>Verdünnungswelle</u>", wie in Aufgabe 3.A.

<u>Eindimensionaler Fall</u>:

* im nichtrelativistischen Limes:

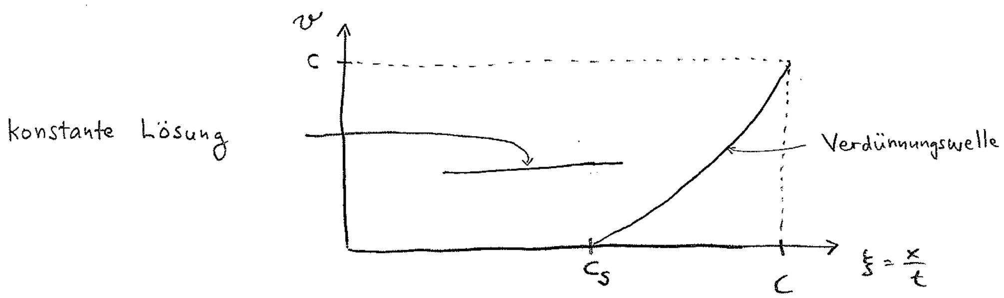
$$\text{Aufgabe 3.A(b)} \Rightarrow \begin{cases} v\left(\frac{x}{t}\right) = \text{const.} & \underline{\text{oder}} \\ \frac{x}{t} - v\left(\frac{x}{t}\right) = c_s\left(\frac{x}{t}\right) \end{cases}$$

* relativistische Verallgemeinerung [genau wie Aufgabe 3.A; Übung!]

$$\begin{cases} v\left(\frac{x}{t}\right) = \text{const.} & \underline{\text{oder}} \\ \dfrac{\xi - v(\xi)}{1 - \frac{\xi v(\xi)}{c^2}} = c_s(\xi) \; ; & \xi := \frac{x}{t} . \end{cases}$$

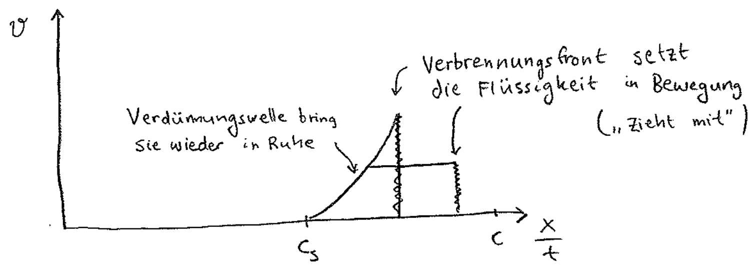
Insbesondere: sei c_s unabhängig von ξ $\Rightarrow$

$$\xi - v = c_s\left(1 - \frac{\xi v}{c^2}\right) \Leftrightarrow \xi - c_s = v\left(1 - \frac{\xi c_s}{c^2}\right) \Leftrightarrow v = \frac{\xi - c_s}{1 - \frac{\xi c_s}{c^2}}$$



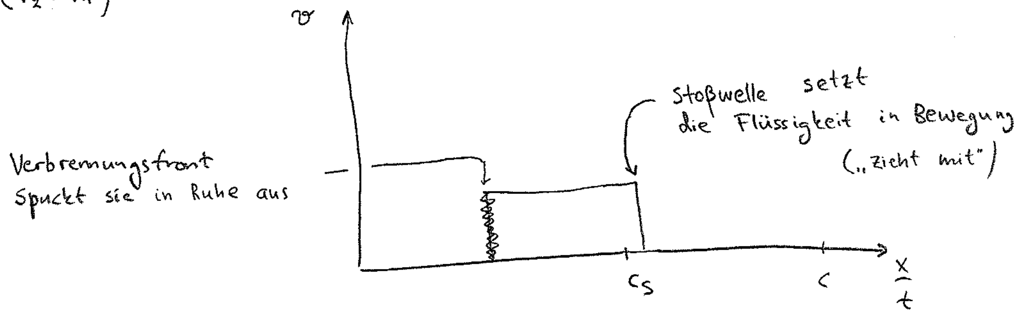
Jetzt setzen wir die Teile zusammen:

Fall (i): „Detonation":
($V_1 > V_2$)



Mikroskopisch: Verbrennungsfront enthält Stoßwelle, die die Flüssigkeit entzündet: :=

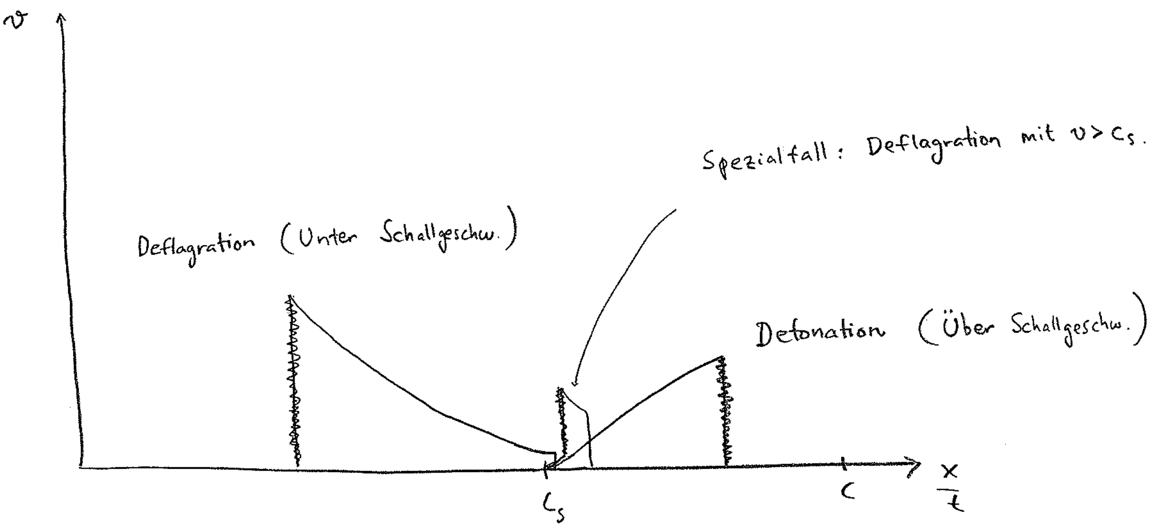
Fall (ii): „Deflagration" bzw. langsame Verbrennung:
($V_2 > V_1$)



Mikroskopisch: Entzündung durch Wärmeleitung, d.h. Diffusion. Die in Verbrennung freigesetzte Wärme wird also vor der Front als Stoßwelle vorangetrieben.

Dreidimensionaler Fall:

Ähnlich, aber die konstante Lösung wird durch eine r-abhängige Lösung (mit $v r^2 \approx$ const.) ersetzt:



Mehr Information kann man durch das Studium von sogenannten <u>Stoßadiabaten</u> bzw. <u>Detonationsadiabaten</u> extrahieren.

Wir ziehen jetzt auch die Teilchenzahlerhaltung in Betracht:

$$N_1^x = N_2^x \quad \Rightarrow \quad n_1\gamma_1 v_1 = n_2\gamma_2 v_2 =: j .$$

Wir definieren $x_i := \frac{w_i}{n_i^2}$, $i = 1, 2$. Es folgt:

* $$\frac{w_1}{n_1^2}\, n_1^2\gamma_1^2 v_1^2 + p_1 c^2 = \frac{w_2}{n_2^2}\cdot n_2^2\gamma_2^2 v_2^2 + p_2 c^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1\cdot j^2 + p_1 c^2 = x_2\cdot j^2 + p_2 c^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\frac{j^2}{c^2} = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}}$$

D.h.: Sei (x_1, p_1) der „Anfangszustand". Der Gradient zum „Endzustand" (x_2, p_2) muss <u>negativ</u> sein. Sein Betrag bestimmt den Teilchenstrom.

* $$\underbrace{w_1\gamma_1^2 v_1}_{\text{Seite 46: } f}\cdot v_1 + p_1 c^2 = w_2\gamma_2^2 v_2\cdot v_2 + p_2 c^2 \quad \Leftrightarrow \quad (p_2 - p_1)c^2 = f(v_1 - v_2) = f\,\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1 + v_2}$$

$$= \frac{f\left(\frac{1}{\gamma_2^2} - \frac{1}{\gamma_1^2}\right)}{v_1 + v_2} = \frac{w_2 v_2 - w_1 v_1}{v_1 + v_2} = \frac{w_2\frac{v_2}{v_1} - w_1}{1 + \frac{v_2}{v_1}}$$

$$\frac{f}{j^2} = \frac{x_1}{v_1} = \frac{x_2}{v_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{w_2 x_2 - w_1 x_1 = (p_2 - p_1)(x_1 + x_2)c^2}$$

D.h.: Sei die Zustandsgleichung $w_2(p_2, n_2)$ bekannt. Für ein gegebenes x_2 und Anfangszustand (x_1, p_1) kann p_2 dann von dieser Gleichung bestimmt werden.