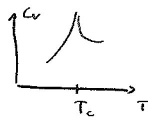
1.11 Suprafluidität [LL VI § 128, 130, 131; sowie Stat. Phys I / II]

Wenn ^4He gekühlt wird, findet bei $T_c = 2{,}19\,K$ (der „λ-Punkt") ein Phasenübergang zweiter Ordung statt. Für $T < T_c$ hat die Flüssigkeit zwei Komponenten:



$$\rho = \underbrace{\rho_n}_{\text{„normal"}} + \underbrace{\rho_s}_{\text{„suprafluid"}}$$

Die suprafluide Komponente besitzt merkwürdige Eigenschaften: [Kapitza 1940]

* keine Zähigkeit; fließt durch Rohr auch ohne einen Druckgradienten } „ideal"
* transportiert keine Wärme; besitzt keine Entropie } Quantenzustand; „Bose-Einstein-Kondensat"
* unbedingt eine Potentialströmung: $\nabla \times \vec{v}_s = 0$ [Landau 1940-41]
* Zirkulation kann unter Umständen dennoch nichtverschwindend sein, ist aber <u>quantisiert</u>, $\propto \hbar$!
* es gibt eine neue Wellenlösung, den „zweiten Schall".

Um diese Tatsachen zu verstehen führen wir einen <u>neuen Freiheitsgrad</u> ein, die Wellenfunktion des Kondensats (oder, um genauer zu sein, deren Phase); sowie <u>eine Gleichung</u> für die Wellenfunktion.

Wellenfunktion: $\Psi(t,\vec{x}) = f(t,\vec{x})\, e^{i\alpha(t,\vec{x})} \in \mathbb{C}$; $f, \alpha \in \mathbb{R}$.
Die Phase α ist definiert modulo 2π.

Normierung: Die Zahl der Teilchen, die sich im Kondensat finden, kann <u>nicht</u> im Voraus fixiert werden; es finden Reaktionen $n \leftrightarrow s$ statt. Es herrscht aber ein <u>chemisches Gleichgewicht</u>, d.h. μ ist eine natürliche Variable.

Wellengleichung: Eine nichtlineare Verallgemeinerung der Schrödinger-Gleichung, genannt „Gross-Pitajewski-Gleichung":

$$i\hbar\, \partial_t \Psi = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \Psi + V(\vec{x})\, \Psi + 2\lambda |\Psi|^2 \Psi + \underbrace{\dots}_{\text{evtl. höhere Potenzen}}$$

$V(\vec{x})$: „externes Potential"; verschwindet für homogene Flüssigkeit ohne äußere Felder, also $V(\vec{x}) \to 0$ für uns.

Suche nach einer stationären Lösung : chemisches Potential taucht wie Enerieeigenwert auf!

$$\Psi(t,\vec{x}) \overset{!}{:=} e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}\,\psi(\vec{x}) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi = -\mu\psi + 2\lambda|\psi|^2\psi \qquad (2).$$

(„Begründung" für (1), durch Form von (2) :

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\delta}{\delta\psi^*}\int d^3\vec{x}\left\{\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - \mu\psi^*\psi + \lambda(\psi^*\psi)^2\right\} = 0$$

Aber $\int d^3\vec{x}\;\psi^*\psi = N_s =$ Teilchenzahl, und

$\int d^3\vec{x}\left\{\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi + \lambda(\psi^*\psi)^2\right\} =$ Energie.

Die minimisierte Grösse ist also $E-\mu N_s$, genau wie es in einem Ensemble mit fixiertem μ sein muss.)

Konsequenzen :

* Homogene Lösung : $(2) \Rightarrow 0 = [-\mu + 2\lambda f^2]\psi = 0$ (mit $f^2 = |\psi|^2$)

  $f^2 = \frac{\mu}{2\lambda} = \text{const.} =: n_s$

  Aber die Phase $\alpha(\vec{x})$ ist beliebig; sie ist der neue Freiheitsgrad, genannt „Goldstone-Boson".

* Neue Interpretation für (1): $\alpha(t,\vec{x}) = \alpha(0,\vec{x}) - \frac{\mu t}{\hbar}$, d.h.

  $$\boxed{\hbar\partial_t\alpha + \mu = 0}$$

  „Josephson-Gleichung".

* Aus der Quantenmechanik: Teilchenstrom $= \vec{j}_s = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\{\psi^*\nabla\psi\}$

  $= \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left\{fe^{-i\alpha}(i\nabla\alpha)f^{i\alpha}\right\}$

  $= f^2\,\frac{\hbar}{m}\nabla\alpha \overset{!}{=} n_s\vec{v}_s$

  $\Rightarrow \vec{v}_s = \nabla\varphi$ mit $\varphi = \frac{\hbar\alpha}{m}$,

  d.h. reine Potentialströmung!

* Gleichung (2) hat aber auch ortsabhängige Lösungen, sogenannte topologische Defekte bzw. Wirbel, wobei $f(\vec{x}) \to 0$ für $\vec{x}_\perp \to 0$ (vgl. Aufgaben 2.A, 4.A). Für $f \to 0$ ist die Phase α nicht definiert, d.h. die Beziehung $\vec{v}_s = \nabla\varphi$ gilt nicht mehr.

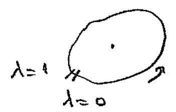
Quantisierung der Zirkulation

$$\Gamma = \oint d\vec{x}\cdot\vec{v}_s \overset{\text{Stokes}}{=} \int d\vec{f}\cdot\nabla\times\vec{v}_s \overset{?}{=} 0$$

Nein, weil $\vec{v}_s = \nabla\varphi$ am Ort eines Wirbels nicht gilt! [Onsager 1949 ; Feynman 1953]

Bleiben wir außerhalb vom Wirbel:

$$\Gamma = \oint d\vec{x}\cdot\nabla\varphi = \frac{\hbar}{m}\int_0^1 d\lambda\,\frac{\partial\vec{x}}{\partial\lambda}\cdot\nabla\alpha(\vec{x}) = \frac{\hbar}{m}\int_0^1 d\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\alpha(\vec{x}(\lambda)) = \frac{\hbar}{m}\left[\alpha(\vec{x}(1)) - \alpha(\vec{x}(0))\right]$$

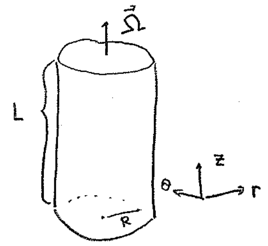


Die Wellenfunktion $\Psi = f e^{i\alpha}$ ist eindeutig

$$\Rightarrow \alpha(\vec{x}(1)) = \alpha(\vec{x}(0)) + 2\pi n\,,\quad n\in\mathbb{Z}\,.$$

In der Praxis tauchen nur $n=-1,0,1$ auf; Wirbel mit $|n|>1$ ist instabil und zerfällt in $|n|$ einzelne Wirbel, die repulsiv miteinander wechselwirken $\Rightarrow$ es entsteht ein „Gitter" von Wirbeln.

Ein Wirbel mit $\Gamma = 2\pi n\cdot\frac{\hbar}{m} = \frac{h}{m}\cdot n$ besitzt Energie und Drehimpuls.



Aus Symmetriegründen: $\vec{v}_s(\vec{r}) = v_s(r)\,\vec{e}_\theta$

$$\Gamma = 2\pi r\, v_s(r) = 2\pi n\frac{\hbar}{m} \Rightarrow v_s(r) = \frac{n\hbar}{mr}$$

Energie:

$$\Delta E_s = \int_0^L dz\int_\xi^R dr\,r\int_0^{2\pi} d\theta\cdot\frac{1}{2}\rho_s\,v_s^2(r)$$

ξ ← Ausdehnung des Wirbelkerns

$$= L\cdot\pi\cdot\rho_s\cdot\left(\frac{n\hbar}{m}\right)^2\int_\xi^R\frac{dr\,r}{r^2} = L\cdot\pi\cdot\rho_s\left(\frac{n\hbar}{m}\right)^2\ln\frac{R}{\xi}\,.$$

Drehimpuls:

$$\Delta\vec{L}_s = \vec{e}_z\int_0^L dz\int_\xi^R dr\,r\int_0^{2\pi} d\theta\;\underbrace{r\,\rho_s\,v_s(r)}_{\text{„}\vec{x}\times\vec{p}\text{"}} = \vec{e}_z\cdot L\cdot 2\pi\cdot\rho_s\,\frac{n\hbar}{m}\cdot\int_\xi^R dr\,r \overset{\xi\ll R}{\approx} \vec{e}_z\cdot L\cdot\pi\cdot\rho_s\cdot\left(\frac{n\hbar}{m}\right)\cdot R^2$$

Ein Wirbel entsteht falls dieses die Gesamtenergie vermindert:

$$\underset{\text{Normalkomponente}}{E_n} = \frac{1}{2}\underset{\text{Trägheitsmoment}}{J_n}\,\Omega^2 = \frac{L_n^2}{2J_n}\,,\quad L_n = J_n\Omega\;;\qquad \vec{L}_{tot} = \vec{L}_n + \vec{L}_s = \text{const} \Rightarrow \Delta\vec{L}_n = -\Delta\vec{L}_s$$

Also:

$$\Delta E = \Delta E_n + \Delta E_s = \frac{L_n}{J_n}\Delta L_n + \Delta E_s = -\Omega\Delta L_s + \Delta E_s < 0$$

$$\Rightarrow \Omega > \Omega_c := \frac{\Delta E_s}{\Delta L_s} = \frac{n\hbar}{mR^2}\ln\frac{R}{\xi}$$

Numerisch:

$$\Omega_c \approx \frac{10^{-34}\,\text{Js}}{7\cdot 10^{-27}\,\text{kg}\cdot(10^{-2}\,\text{m})^2}\cdot\ln\frac{10^{-2}\,\text{m}}{10^{-10}\,\text{m}} \approx 10^{-3}\,\frac{1}{\text{s}}$$

Hydrodynamik und zweiter Schall

Wir benutzen, der Einfachheit halber, relativistische Notation wie im Kapitel 1.2.
Die Normalkomponente wird auch als ideale Flüssigkeit behandelt.
Also in der normalen Phase:

$$N^\mu = n u^\mu$$
$$T^{\mu\nu} = -p\,\eta^{\mu\nu} + (\varepsilon + p)\,\frac{u^\mu u^\nu}{c^2}$$
$$\partial_\mu N^\mu = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu (s u^\mu) = 0 \;.$$

Verallgemeinerung wegen der superfluiden Komponente [vgl. arxiv.org/abs/hep-ph/0011246]:

* Teilchenstrom erhält den zusätzlichen Term $j^i = \underbrace{f^2 \frac{\hbar}{m} \partial_i \alpha}_{\text{Seite 42}} = -\frac{f^2\hbar}{m}\partial^i \alpha$:

$$N^\mu \to n u^\mu - \frac{f^2\hbar}{m}\partial^\mu \alpha$$

* Energieimpulstensor erhält auch einen zusätzlichen Term (vgl. Seite 56):

$$T^{\mu\nu} \to -p\eta^{\mu\nu} + (\varepsilon+p)\frac{u^\mu u^\nu}{c^2} + \frac{f^2\hbar^2}{m}\left(\partial^\mu\alpha\,\partial^\nu\alpha - \eta^{\mu\nu}\,\frac{1}{2}\,\partial^\beta\alpha\,\partial_\beta\alpha\right)$$

* Die kovariante Form der Josephson-Gleichung ist

$$\hbar u^\mu \partial_\mu \alpha + \mu = 0 \,.$$

* Es gelten: $\partial_\mu N^\mu = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$; $\varepsilon + p = Ts + \mu n$; $dp = s\,dT + n\,d\mu$.

Es folgt: $\partial_\mu (s u^\mu) = 0$.

Wir können den „ersten Schall" ausschalten falls wir $v^i \to 0$, $T \to$ const. setzen.
Sei $\xi_i := \partial_i \alpha$ klein. Dann ist

$$N^0 = nc - \frac{f^2\hbar}{m}\partial_0\alpha \overset{\text{Josephson}}{=} nc + \frac{f^2\mu}{mc} =: n_{tot}\cdot c \quad ; \quad N^i = -\frac{f^2\hbar}{m}\partial^i\alpha = \frac{f^2\hbar}{m}\xi_i$$

Also:

$$\partial_\mu N^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c\cdot\frac{\partial n_{tot}}{\partial\mu}\,\partial_0\mu + \frac{f^2\hbar}{m}\partial_i\xi_i = 0$$
$$\partial_i\partial_i\left[\hbar u^\mu\partial_\mu\alpha + \mu\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hbar c\;\partial_0(\partial_i\xi_i) + \partial_i\partial_i\,\mu = 0$$

Ansatz: $\mu = \tilde{\mu}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$; $\xi_i = \tilde{\xi}_i\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial n_{tot}}{\partial\mu}\omega & -\frac{f^2\hbar}{m} \\ -\vec{k}^2 & \hbar\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\mu} \\ \vec{k}\cdot\vec{\tilde{\xi}} \end{pmatrix} = 0$$

Lösung existiert falls $\det(\;) = \hbar\left[\frac{\partial n_{tot}}{\partial\mu}\omega^2 - \frac{f^2}{m}\vec{k}^2\right] = 0$.

Fazit: $\omega^2 = c_2^2\vec{k}^2$ mit $c_2^2 = \dfrac{f^2}{m\,\frac{\partial n_{tot}}{\partial\mu}}$ „zweite Schallgeschwindigkeit".