1.10 Strömung mit kleiner Reynolds-Zahl [LL VI § 20, 26, 27]

Für eine inkompressible Flüssigkeit mit $\vec{v} := u\vec{v}'$, $\vec{x} := l\vec{x}'$, $p := \rho u^2 p'$ gilt im stationären Limes (Seite 36):

$$\begin{cases} \nabla' \cdot \vec{v}' = 0 \\ -\vec{v}' \cdot \nabla' \vec{v}' + \dfrac{1}{Re} \nabla'^2 \vec{v}' = \nabla' p' \end{cases} , \quad \text{wobei} \quad Re := \frac{lu}{\nu} = \frac{\rho l u}{\eta} .$$

Zum Beispiel:

$$* \text{ Flugzeug}: \quad Re \approx \frac{10\,m \times 100\,\frac{m}{s}}{10^{-5}\,\frac{m^2}{s}} \sim 10^8$$

$$* \text{ Plankton}: \quad Re \approx \frac{10^{-3}\,m \times 10^{-3}\,\frac{m}{s}}{10^{-6}\,\frac{m^2}{s}} \sim 1 .$$

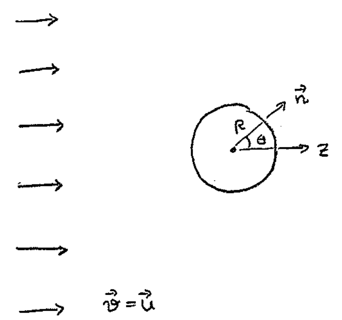
Für $Re \ll 1$ ist die Strömung besonders „nichtideal"; betrachten wir diesen Limes. Weil $1/Re \gg 1$ ist, können wir den ersten Term der zweiten Gleichung wegfallen lassen, und bekommen damit eine viel einfachere lineare Gleichung:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 & (i) \\ \eta \nabla^2 \vec{v} = \nabla p , & (ii) \end{cases}$$

wo wir zu den alten physikalischen Einheiten zurückgekehrt sind.

Beispiel (wie auf Seite 16):

$$\left(\text{Damals mit} \begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho}\right) \\ \vec{v} = \nabla \varphi \end{cases} \right)$$



Bemerkung:

$$\nabla \times \left\{ \eta \nabla^2 \vec{v} = \nabla p \right\} \Rightarrow \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}) = 0 \qquad (iii)$$

Aber $\nabla \times \vec{v} \neq 0$ ist möglich!
Keine Potentialströmung wie auf Seite 16 im Falle der idealen Flüssigkeit!

Dennoch können wir $\vec{v}$ zuerst mittels (i) und (iii) bestimmen, und nachher p aus (ii).

Lösung: Nehme Ansatz $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$ mit $\lim_{r\to\infty} \vec{v}' = 0$, wie früher.

Seite 16: $\vec{v}_1' = a \cdot \frac{\vec{u} - 3\vec{u}\cdot\vec{n}\,\vec{n}}{r^3}$ hat $\nabla\cdot\vec{v}_1' = 0$ und $\nabla\times\vec{v}_1' = 0$, deshalb auch jetzt eine mögliche Lösung, aber nicht die einzige.

Wie in der Magnetostatik: $\vec{v}' = \nabla\times\vec{A} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{v}' = 0$ automatisch erfüllt.

Ansatz (woher ??):

$$\vec{A} := \nabla f(r) \times \vec{u} = \nabla\times(f(r)\vec{u})$$

$$\vec{v}' = \nabla\times\vec{A} = \nabla(\nabla f\cdot\vec{u}) - \nabla^2 f\,\vec{u}$$

wirbelfreier Teil!

$\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$;
$\nabla\cdot(f\vec{u}) = \nabla f\cdot\vec{u}$

$$\nabla\times\vec{v}' = -\nabla^2\,\nabla\times(f\vec{u}) = -\nabla^2(\nabla f)\times\vec{u}$$

Gleichung (iii):

$$\underbrace{\nabla^2\nabla^2\nabla f}_{\text{Funktion von } \vec{r} \Rightarrow \text{muss selbst verschwinden}} \times\vec{u} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2\nabla^2\nabla f = \nabla(\nabla^2\nabla^2 f) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2\nabla^2 f = \text{Const.}$$

Die Konstante muss verschwinden: $\vec{v}'$ enthält zweite Ableitungen von f und verschwindet bei $r\to\infty$; hier sind schon die vierten!

Also: $\nabla^2(\nabla^2 f) = 0$; $\nabla^2 f = \frac{c}{r^\alpha}$ (Ansatz)

Seite 16 mit $l = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$.

Weil $\vec{v}' \propto \nabla^2 f$ bei $r\to\infty$ verschwindet ist nur $\alpha = 1$ akzeptabel.

$$\Rightarrow \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} = \frac{c}{r}$$

$$\Rightarrow f = \frac{c}{2}r + \underbrace{\frac{b}{r} + a}$$

spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

allgemeine Lösung der homogenen Gl.

Die entsprechende Geschwindigkeit:

$$\vec{v}' = \nabla(\nabla f\cdot\vec{u}) - \frac{c}{r}\vec{u}$$

$$= \nabla\left(\frac{c}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{r} - \frac{b\,\vec{r}\cdot\vec{u}}{r^3}\right) - \frac{c}{r}\vec{u}$$

$$= \frac{c}{2}\left(\frac{\vec{u}}{r} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}\,\vec{n}}{r}\right) - b\,\frac{\vec{u} - 3\vec{u}\cdot\vec{n}\,\vec{n}}{r^3} - \frac{c}{r}\vec{u}$$

$$= \underbrace{-\frac{c}{2}\,\frac{\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{n}\,\vec{n}}{r}}_{\substack{\text{neuer Teil!} \\ (\nabla\cdot\vec{v}'=0,\ \nabla\times\vec{v}'\neq 0,) \\ \nabla^2(\nabla\times\vec{v}')=0}} \underbrace{- b\,\frac{\vec{u} - 3\vec{u}\cdot\vec{n}\,\vec{n}}{r^3}}_{\substack{\text{alte Form} \\ (\nabla\cdot\vec{v}'=0,\ \nabla\times\vec{v}'=0)}}$$

Randbedingungen: $\vec{v}\,\big|_{r=R} = \vec{u} + \vec{v}'\,\big|_{r=R} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{u}\left(1 - \frac{c}{2R} - \frac{b}{R^3}\right) + \vec{u}\cdot\vec{n}\,\vec{n}\,\underbrace{\left(-\frac{c}{2R} + \frac{3b}{R^3}\right)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{6b}{R^2}$$

$$\hookrightarrow \quad 1 - \frac{4b}{R^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{R^3}{4} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3R}{2}$$

D.h., $$\vec{v} = \vec{u} - \frac{3R}{4}\,\frac{\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{n}\,\vec{n}}{r} - \frac{R^3}{4}\,\frac{\vec{u} - 3\vec{u}\cdot\vec{n}\,\vec{n}}{r^3}$$

Weitere Ergebnisse (ohne Herleitung):

* Druck $\quad p = \text{const.} - \frac{3\eta R}{2}\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{r^2}$

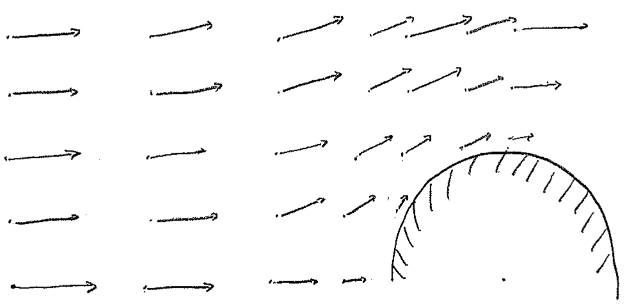
* Kraft $\quad \vec{F} = -\int_{\partial V} |d\vec{f}|\, n_i\, \pi^{ij}\, \vec{e}_j = 6\pi R \eta\, \vec{u}$

„Stokessche Formel"

Bemerkungen:

* Wie schon auf Seite 33 verschwindet die Reibungskraft im Limes der idealen Flüssigkeit, d.h. $\eta \to 0$. Diese Tatsache wird das „D'Alembertsche Paradoxon" genannt.

* Unsere Näherung $\left(Re = \frac{\rho l u}{\eta} \ll 1\right)$ ist vernünftig für kurze Abstände $(r \approx R)$ und kleine Geschwindigkeiten.



(symmetrisch)

Was passiert wenn Re wächst?

Im Prinzip: Linearisiere
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{v} = 0 \\ \partial_t \vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} \end{cases}$$

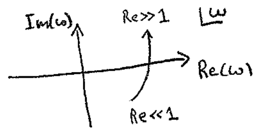
um eine stationäre Lösung $\vec{v}_0$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \leftarrow$ Störung.

Funktion von $\vec{x}$ aber nicht t

Zur ersten Ordnung:
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{v}_1 = 0 \\ \partial_t \vec{v}_1 + \vec{v}_0\cdot\nabla\vec{v}_1 + \vec{v}_1\cdot\nabla\vec{v}_0 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v}_1 \end{cases}$$

Nehme Ansatz
$$\vec{v}_1(t,\vec{x}) = \mathrm{Re}\left[e^{-i\omega t}\,\vec{f}(\vec{x})\right]$$
keine ebene Welle

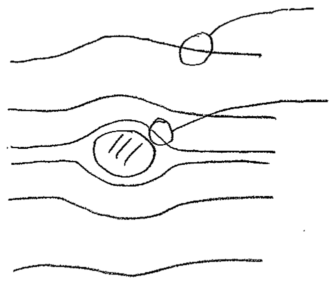
Lösung (?):



$$e^{-i(\mathrm{Re}(\omega) + i\,\mathrm{Im}(\omega))t} = e^{-i\mathrm{Re}(\omega)t}\, e^{\mathrm{Im}(\omega)t}$$

Es gibt also einen Wert Re_{kr} wo die Störung instabil wird (exponentiell wächst), und keine stationären Lösungen mehr zu finden sind. Skizze:

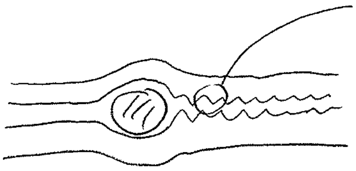
$u < u_{kr}$ stationäre bzw. laminare Strömung



Potentialströmung wie bei idealer Flüssigkeit

Viskose Strömung wie bei kleiner Reynolds-Zahl

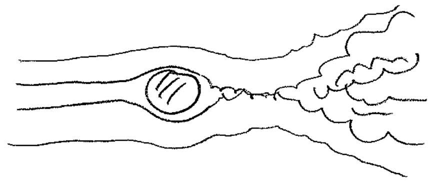
$u > u_{kr}$



nichtstationäre Strömung mit charakteristischer Wellenfrequenz $\mathrm{Re}(\omega_1)$

(nichtsymmetrisch!)

$u \gg u_{kr}$ turbulente Strömung



„chaotische" turbulente Lösung mit unendlich vielen Frequenzen

Wie die turbulenten Lösungen systematisch aus der Navier-Stokes-Gleichung hergeleitet werden können bleibt immer noch ein Mysterium.

↳ www.claymath.org/millennium