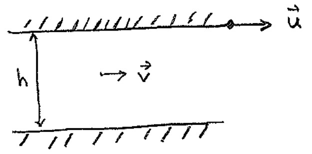
1.9 Einfache Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung [LL VI § 17, 19]

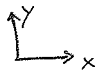
Der Einfachheit halber beschränken wir uns jetzt auf inkompressible Flüssigkeiten (ρ = const). Die Bewegungsgleichungen sind (Seite 30):

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{v} = 0 & \text{(i)} \\ \partial_t \vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\dfrac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} & \text{(ii)} \quad \text{Navier-Stokes} \end{cases}$$

wobei $\nu = \eta/\rho$ die kinematische Zähigkeit ist. ((S/s) nicht gebraucht weil ρ bekannt.)

Beispiel 1:
bewegende Ebene





Die Strömung sei stationär. Ansatz: $\vec{v} = v(y)\,\vec{e}_1$.

(i) $\partial_x v(y) = 0$ ok.

(ii) $\underbrace{v(y)\,\partial_x\, v(y)\vec{e}_1}_{0} = -\dfrac{\nabla p}{\rho} + \nu \dfrac{d^2 v(y)}{dy^2}\,\vec{e}_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \underbrace{\dfrac{\partial p}{\partial x}}_{\text{unabhängig von } y} = \underbrace{\eta\, \dfrac{d^2 v(y)}{dy^2}}_{\text{unabhängig von } x} \end{cases}$$

Es folgt $p = \alpha x + \beta$. Wenn wir als Randbedingungen $p(-\infty) = p(+\infty)$ wählen, dann ist $\alpha = 0$, und

$$\frac{d^2 v(y)}{dy^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v(y) = \gamma y + \delta .$$

Randbedingungen für $\vec{v}$:

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0$$
$$v(h) = |\vec{u}| \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{|\vec{u}|}{h}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{u}\cdot\frac{y}{h} \; ; \quad 0 < y < h .}$$

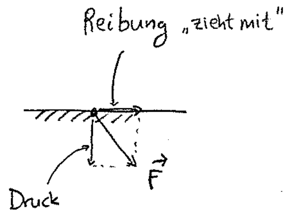
Kraftdichte (Seite 30):

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi^{ij} = p\,\delta^{ij} - \eta\,(\partial_j v^i + \partial_i v^j)$$

$$= \begin{pmatrix} p & -\eta\frac{|\vec{u}|}{h} & 0 \\ -\eta\frac{|\vec{u}|}{h} & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

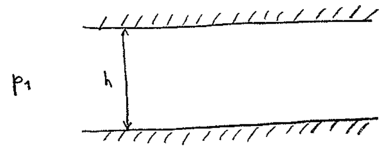
Auf Ebene $y = 0$: $\vec{n} = \vec{e}_2$

$$\Rightarrow \frac{F^i}{A} = -\sum_j \pi^{ij} n_j = \begin{pmatrix} \eta\frac{|\vec{u}|}{h} \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}$$



Beispiel 2:

ruhende Ebene mit einem Druckgradienten in x-Richtung



$; p_1 \neq p_2$

Die Gleichungen sind wie früher; die Randbedingungen sind neu.

$$p_1 \neq p_2 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha \neq 0 .$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial^2 v(y)}{dy^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow v(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx} y^2 + \gamma y + \delta$$

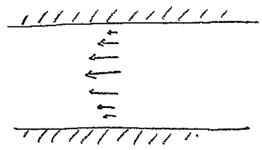
Randbedingungen:

$$v(0) = 0 \Rightarrow \delta = 0 .$$

$$v(h) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx} h^2 + \gamma h = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\cdot h$$

$$\Rightarrow v(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left[y(y-h) \right]$$

Für $p_2 > p_1$:



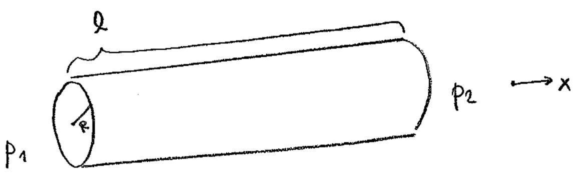
Bemerkung:

Für ideale Flüssigkeiten $(\eta = 0)$ muss $\frac{\partial p}{\partial x}$ im stationären Fall verschwinden; d.h., ein Druckgradient wird schnell durch eine Strömung abgeglichen und existiert dann nicht mehr. Dieses ist genau was bei <u>suprafluiden</u> Flüssigkeiten (z.B. ^4He bei $T < 2K$) passiert.

Vgl. Seite 33

Beispiel 3:

Rohr mit Druckgradient



$\Delta p := p_2 - p_1$

Ansatz: $\vec{v} = v(r)\,\vec{e}_1 \quad ; \quad r = \sqrt{y^2+z^2}$

$\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ok!

Navier- Stokes:

$$\vec{v}\cdot\nabla = v(r)\frac{\partial}{\partial x^2} \Rightarrow \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = 0$$

$$\nabla p = \eta\nabla^2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{unabhängig von } y,z \text{ bzw } r} = \underbrace{\eta\left(\frac{d^2v(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv(r)}{dr}\right)}_{\text{unabhängig von } x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} = \frac{\Delta p}{\ell}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2v(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv(r)}{dr} = \frac{\Delta p}{\eta\ell}$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung : $\chi := \frac{dv}{dr}$

$$\frac{d\chi}{dr} + \frac{\chi}{r} = 0 \qquad \frac{d\chi}{\chi} = -\frac{dr}{r}$$

$$\ln\chi = -\ln r + \text{const}$$

$$\chi = \frac{a}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a\frac{dr}{r} = dv \Rightarrow v = a\ln r + b$$

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$v(r) = c\cdot r^2 \qquad \frac{dv}{dr} = 2cr$$

$$\Rightarrow 4c = \frac{\Delta p}{\eta\ell} \qquad c = \frac{\Delta p}{4\eta\ell}$$

Also:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta\ell}r^2 + a\ln r + b$$

Randbedingungen: $v(0) = \text{endlich} \Rightarrow a = 0$

$v(R) = 0 \Rightarrow b = -\frac{\Delta p}{4\eta\ell}R^2$

$$\Rightarrow \underline{v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta\ell}(r^2 - R^2)} \qquad (<0)$$

Massenstrom (Durchflußmenge) durch Rohr:

$$\frac{dM}{dt} = \int_0^R 2\pi r\,dr\cdot\rho\cdot v(r) = 2\pi\rho\cdot\frac{\Delta p}{4\eta\ell}\underbrace{\int_0^R dr\,(r^3 - R^2r)}_{\frac{1}{4}R^4 - \frac{1}{2}R^4 = -\frac{1}{4}R^4}$$

$$= -\frac{\pi\rho\,\Delta p\,R^4}{8\eta\ell} = -\frac{\pi\,\Delta p\,R^4}{8\nu\ell}.$$

<u>Bemerkung</u>: $\frac{dM}{dt} \to -\infty$ für $\nu \to 0$ (ideale bzw. suprafluide Flüssigkeit) !

—— o ——

Ähnlichkeitsgesetz

Die gefundenen Lösungen hängen von den Dimensionen (h, ℓ, R) des Problems ab. Können wir eine allgemeine Aussage zur Form der Abhängigkeit formulieren?

Stationäre Navier-Stokes: $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\nabla^2\vec{v}$

Wir „skalieren" alle Variablen zu dimensionslosen Einheiten, die von Grössenordung eins sein sollten:

$$\vec{v} := u\,\vec{v}' \qquad \vec{x} := \ell\,\vec{x}' \quad ; \quad \nabla = \frac{1}{\ell}\nabla'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u^2}{\ell}\,\vec{v}'\cdot\nabla'\vec{v}' = -\frac{1}{\ell}\nabla'\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{u\nu}{\ell^2}\nabla'^2\vec{v}' \quad \Big| \cdot \frac{\ell}{u^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{v}'\cdot\nabla'\vec{v}' = -\nabla' p' + \frac{\nu}{\ell u}\nabla'^2\vec{v}' \quad , \quad \text{wobei } p' := \frac{p}{\rho u^2} .$$

Dimension: $[p'] = \frac{[p]}{[\rho][u]^2} = \frac{N/m^2}{\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{m^2}{s^2}} = \frac{\frac{kg\,m}{s^2}\cdot\frac{1}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{m^2}{s^2}} = 1$, also auch dim.los.

Definition: $Re := \frac{\ell u}{\nu} = \frac{\rho \ell u}{\eta} =$ „Reynolds-Zahl".

Die „allgemeine Form" der Lösung hängt also nur vom Re ab:

$$\vec{v}' = \vec{v}'(\vec{x}', Re)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(\vec{x}) = u\,\vec{v}'\left(\frac{\vec{x}}{\ell}, Re\right) .$$

D.h., man erhält eine reskalierte „ähnliche" Lösung, wenn man ℓ und u so ändert, dass Re fest bleibt.

(Dieselbe Betrachtung mit $\nu = 0$ aber $\tau_c \neq 0$ $\Rightarrow$ Abhängigkeit nur von $\frac{\tau u}{\ell}$! $\Rightarrow$ Aufgabe 3.A)

Für den Druck:

$$p' = p'(\vec{x}', Re)$$

$$\Rightarrow \quad p(\vec{x}) = \rho u^2\, p'\left(\frac{\vec{x}}{\ell}, Re\right) .$$

Bemerkung: ℓ, u und auch Re können nicht eindeutig definiert werden, besonders wenn die Geometrie des Problems kompliziert ist; deshalb ist Re keine Eigenschaft der Materie selbst, wie ν & η, sondern enthält auch Information über die Randbedingungen. Z.B.:

$Re \to \infty$ falls $\nu \to 0$ (ideale Flüssigkeit)
oder $\ell \to \infty$ (grosse Objekte)
oder $u \to \infty$ (grosse Geschwindigkeiten)