1.8 Zähe Flüssigkeiten [LL VI § 15, 16, 49, 50]

Physikalisch: Zähigkeit bzw. Viskosität $\Rightarrow$
* Reibung bzw. Dissipation: mechanische Energie (= kinetische Energie und Gravitationspotential) geht in Wärme über; Entropie wächst.
* Dämpfung: Wellenamplitude nimmt ab.
* Turbulenz.
* Aber auch: neue Kräfte!

Mathematisch: Teilchenzahl, Impuls und Energie müssen immer noch erhalten bleiben; was können wir also in den Grundgleichungen ändern?

(1/5) Teilchenzahl: nichts! $\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$.

(2-4/5) Impuls: $\partial_t(\rho\vec{v}) + \sum_j \partial_j \pi^{ij} = 0$.

Vielleicht kann π^{ij} zusätzliche Terme enthalten?

Taylor-entwickle π^{ij} in Ableitungen:

$$\pi^{ij} := p\delta^{ij} + \rho v^i v^j - \eta\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)$$
$$- \zeta\left(\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)$$
$$- ?\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right) + \mathcal{O}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}_{\text{z.B. } \frac{\partial^2 p}{\partial x^i \partial x^j}}\Bigg)$$

Die weiteren Terme sind für ~homogene Medien klein.
(In der Nähe von Unstetigkeiten sind Ableitungen aber wichtig!)

Die drei Strukturen:

- η = „Scherviskosität" ; $\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}$ ist symmetrisch und <u>spurlos</u>.
- ζ = „Dehnviskosität" ; $\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}$ ist der <u>„Spurteil"</u>.
- $\frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^j}{\partial x^i}$ ist antisymmetrisch, und wird <u>nicht</u> erlaubt $\Rightarrow ? := 0$.

(Physikalisch: mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierende Flüssigkeit, $\vec{v} := \vec{\Omega}\times\vec{x}$ [vgl. Aufgabe 2.V1], erfahre keine Dissipation $\Rightarrow \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \partial_j \epsilon^{ikl}\Omega^k x^l = \epsilon^{ikj}\Omega^k$ führe zu keinen zusätzlichen Termen $\Rightarrow$ nur symmetrische Kombinationen sind erlaubt.)

Die Euler-Gleichung wird ersetzt durch:

$$\rho\left(\partial_t v^i + \vec{v}\cdot\nabla v^i\right) = -\partial_i p + \sum_j \partial_j\left[\eta\left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \frac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)\right]$$
$$+ \partial_i\left[\zeta\,\nabla\cdot\vec{v}\right]$$

Falls η und ζ in guter Näherung konstant sind, bekommen wir

$$\rho\,(\partial_t \vec v + \vec v\cdot\nabla\vec v) = -\nabla p + \eta\left[\nabla^2\vec v + \frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\vec v)\right] + \zeta\,\nabla(\nabla\cdot\vec v)$$

Falls die Flüssigkeit noch inkompressibel ist ($\rho = \text{const} \Rightarrow \nabla\cdot\vec v = 0$) erhalten wir die berühmte <u>Navier-Stokes-Gleichung</u>:

$$\boxed{\partial_t\vec v + \vec v\cdot\nabla\vec v = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\,\nabla^2\vec v},$$

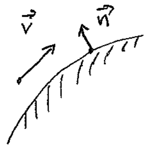
wobei $\nu := \frac{\eta}{\rho}$ die „kinematische Zähigkeit" genannt wird.

$[\nu] = \frac{m^2}{s}$;

Quecksilber	$\sim 10^{-7}\ \frac{m^2}{s}$
Wasser	$\sim 10^{-6}\ \frac{m^2}{s}$
Luft	$\sim 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$
Glyzerin	$\sim 10^{-3}\ \frac{m^2}{s}$

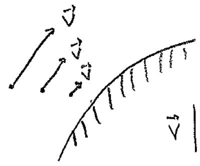
<u>Randbedingungen</u>:

* bei idealen Flüssigkeiten:



$\vec v\cdot\vec n\big|_{\partial V} = 0$

* jetzt: molekülare Anziehungskräfte bzw. Reibung können und eigentlich <u>müssen</u> (wegen Existenz von $\partial_i v^j$) in Betracht gezogen werden: $\vec v$ sei kontinuierlich, d.h. verschwindend auf der Oberfläche.



$\vec v\big|_{\partial V} = 0$.

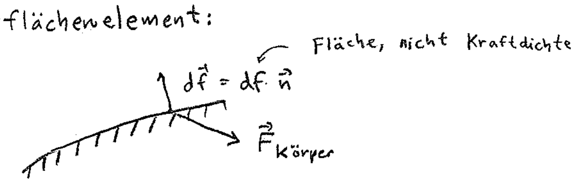
(Beispiel: Wind verschwindet bei $z \to 0$).

<u>Kraft auf Oberfläche</u>:

Druck = Kraft / Fläche.

Jetzt: $p\,\delta^{ij} \to p\,\delta^{ij} - \eta\left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \frac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec v\right) - \zeta\,\delta^{ij}\,\nabla\cdot\vec v$

Nehme Oberflächenelement:



$$\vec F_{Körper} = -\int_{\partial V} d\vec f\cdot\vec{\vec\pi} \quad ; \quad \vec{\vec\pi} := \sum_{ij}\vec e_i\,\pi^{ij}\,\vec e_j$$

Richtung von $\vec n$!

$$= -\int_{\partial V} df\; n_i\,\vec e_j\left\{\left[p + \left(\frac{2\eta}{3} - \zeta\right)\nabla\cdot\vec v\right]\delta^{ij} - \eta\left[\partial_j v^i + \partial_i v^j\right]\right\}$$

$\vec n\cdot\vec e_i$

$\neq 0$ obwohl $\vec v = 0$ auf ∂V!

(5/5) Energie:

$$\partial_t \left(\frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 + e \right) + \nabla\cdot \left[\vec{v} \left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + e + p \right) + \dots \right] = 0$$

zusätzliche Teile sind
auch hier möglich!

Erstens:

Der Druck (Kraftdichte) wurde in π^{ij} als

$$p\delta^{ij} \Rightarrow p\delta^{ij} - \eta\left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \frac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right) - \zeta\left(\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)$$

ersetz; tun wir dasselbe hier.

Zweitens:

Weil Ableitungen erlaubt sind, können wir uns auch einen Term ohne $\vec{v}$ in Energiestromdichte vorstellen. Wähle dies als $-\kappa\nabla T$; $\kappa :=$ Wärmeleitfähigkeit.

(Bemerkung:
Wäre vielleicht etwas verständlicher in der relativistischen Notation; vgl. LL VI § 127; η, ζ in $T^{\mu\nu}$ und κ in N^{μ}!)

$$\Rightarrow \partial_t \left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + e \right) + \nabla\cdot \left[\vec{v}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + w \right) - \eta\left(\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + \frac{1}{2}\nabla\vec{v}^2 - \frac{2}{3}\vec{v}\,\nabla\cdot\vec{v} \right) - \zeta\vec{v}\,\nabla\cdot\vec{v} - \kappa\nabla T \right] = 0.$$

Physikalische Bedeutung des neuen Terms:

Setze $\vec{v} \to 0$ (keine Strömung)

(1/5) $\Rightarrow$ $\partial_t \rho = 0$ $\Rightarrow$ ρ zeitunabhängig

(2-4/5) $\Rightarrow$ $\nabla p = 0$ $\Rightarrow$ p ortsunabhängig

(5/5) $\Rightarrow$ $\partial_t e - \nabla\cdot(\kappa\nabla T) = 0$ nichttrivial!

Es gibt also Energietransport auch ohne Bewegung, durch Wärmeleitung.

T hoch $\xrightarrow[-\nabla T]{}$ T niedrig

$\Rightarrow$ Aufgabe 3.V1.

Check: Was passiert mit der Entropie?

* (2-4/5) kontrahiert mit v^i (Seite 29) $\Rightarrow$

$$\rho\left(v^i\partial_t v^i + v^i\,\vec{v}\cdot\nabla v^i\right) + \vec{v}\cdot\nabla p = v^i\partial_j\left[\eta\left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \tfrac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)\right] + \vec{v}\cdot\nabla\left[\zeta\,\nabla\cdot\vec{v}\right] \qquad (a)$$

* (5/5) mit Einsatz von $w = Ts + \mu n$ (Seite 31) $\Rightarrow$

$$\tfrac{1}{2}\cancel{\partial_t\rho}\,\vec{v}^2 + \rho v^i\partial_t v^i + \tfrac{1}{2}\cancel{\nabla\cdot(\rho\vec{v})}\,\vec{v}^2 + \rho v^i\,\vec{v}\cdot\nabla v^i + \partial_t e$$

$$\nabla\cdot(\vec{v}w)\left\{ + T\nabla\cdot(s\vec{v}) + \mu\nabla\cdot(n\vec{v}) + \vec{v}\cdot\underbrace{(s\nabla T + n\nabla\mu)}_{\nabla p\ \text{(Gibbs-Duhem)}}\right.$$

$$= \partial_j\left[\eta v^i\left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \tfrac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)\right] + \partial_j\left[\zeta v^j\,\nabla\cdot\vec{v}\right] + \partial_j\left[\varkappa\,\partial_j T\right] \qquad (b)$$

* (b) $-$ (a) $\Rightarrow$

$$\partial_t e + \underbrace{\mu\nabla\cdot(n\vec{v})}_{(1/5)\Rightarrow\ -\partial_t n} + T\nabla\cdot(s\vec{v}) = (\partial_j v^i)\left[\eta\left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \tfrac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)\right] + \zeta(\nabla\cdot\vec{v})^2 + \nabla\cdot(\varkappa\nabla T)$$

* Thermodynamik: $dE = TdS - pdV + \mu dN \quad ; \quad E = TS - pV + \mu N$

$$\Rightarrow de = d\left(\tfrac{E}{V}\right) = \tfrac{dE}{V} - \tfrac{E}{V^2}dV = \tfrac{T}{V}dS - \cancel{\tfrac{p}{V}dV} + \tfrac{\mu}{V}dN - \tfrac{TS}{V^2}dV + \cancel{\tfrac{p}{V}dV} - \tfrac{\mu N}{V^2}dV = Td\left(\tfrac{S}{V}\right) + \mu d\left(\tfrac{N}{V}\right)$$

$$\Leftrightarrow de - \mu dn = Tds$$

* $$\tfrac{1}{2}\left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \tfrac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)\left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \tfrac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right) = \left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \tfrac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)\partial_j v^i - \tfrac{1}{3}\underbrace{\left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \tfrac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)\delta^{ij}}_{\nabla\cdot\vec{v} + \nabla\cdot\vec{v} - 2\nabla\cdot\vec{v} = 0}\nabla\cdot\vec{v}$$

* $$\nabla\cdot(\varkappa\nabla T) = T\nabla\cdot\left(\frac{\varkappa\nabla T}{T}\right) + \frac{1}{T}\varkappa(\nabla T)^2$$

$$\Rightarrow\quad T\left[\partial_t s + \nabla\cdot(s\vec{v})\right] = \frac{\eta}{2}\sum_{i,j}\left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \tfrac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)^2 + \zeta(\nabla\cdot\vec{v})^2 + T\nabla\cdot\left(\frac{\varkappa\nabla T}{T}\right) + \frac{\varkappa}{T}(\nabla T)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \partial_t s + \nabla\cdot(s\vec{v}) + \nabla\cdot\left(\frac{\varkappa\nabla T}{T}\right) = \frac{\eta}{2}\sum_{i,j}\left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \tfrac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)^2 + \zeta(\nabla\cdot\vec{v})^2 + \varkappa\left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2$$

Integriere über Volumen V, mit $\vec{v}\cdot\vec{n}\big|_{\partial V} = \nabla T\cdot\vec{n}\big|_{\partial V} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V d^3\vec{x}\, s = \int_V d^3\vec{x}\,\partial_t s = \underbrace{\frac{\eta}{2}\int_V d^3\vec{x}\sum_{i,j}\left(\partial_j v^i + \partial_i v^j - \tfrac{2}{3}\delta^{ij}\nabla\cdot\vec{v}\right)^2 + \zeta\int_V d^3\vec{x}\,(\nabla\cdot\vec{v})^2 + \varkappa\int_V d^3\vec{x}\left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2}_{\geq 0}$$

$$\boxed{\text{Fazit: für } \eta > 0,\ \zeta > 0 \text{ oder } \varkappa > 0 \text{ ist } dS/dt > 0.}$$

— ∘ —