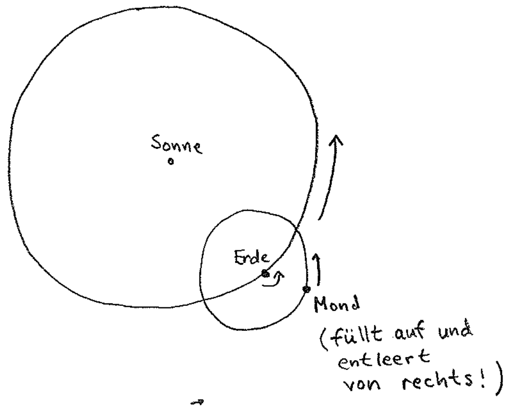
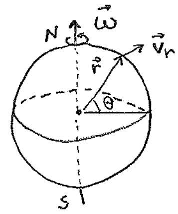
1.7 Strömungen in der Atmosphäre [K. Kajantie Skript 1993]

Die Erde ist ein rotierendes System; Scheinkräfte spielen eine wichtige Rolle!



$$|\vec{\omega}| = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{(\overbrace{365}^{\text{kleine Runden}} \overbrace{+1}^{\text{große Runde}})\cdot 2\pi}{365 \times 24 \times 3600\,\mathrm{s}} = 7{,}3\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{s}$$

Für einen ruhenden Körper auf Erdoberfläche:



$$\vec{v}_r = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$|\vec{v}_r| = |\vec{\omega}|\,|\vec{r}|\,\sin(\sphericalangle) = |\vec{\omega}|\,\overbrace{R}^{6{,}4\times10^6\,\mathrm{m}}\cos\theta = 470\cdot\cos\theta\,\frac{m}{s}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{v}_r = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$|\vec{a}| = |\vec{\omega}|^2 R\cos\theta = 0{,}034\cdot\cos\theta\,\frac{m}{s^2}$$

Die Bewegungsgleichungen im erdfesten Koordinatensystem enthalten Scheinkräfte (Theorie I):

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\left[\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right]$$

Zentrifugalkraft

Coriolis-Kraft

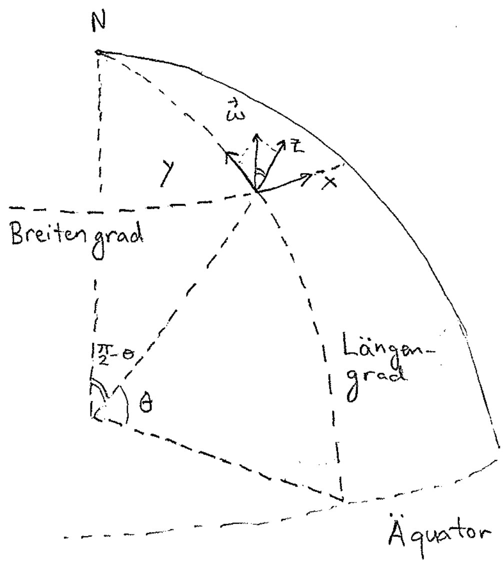
Für konstanten $\vec{\omega}$ ist die Euler-Gleichung also der Form

$$\rho\left(\partial_t\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right) = -\nabla p - \rho\left[\nabla\phi + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\right]$$

Teilchenzahl- und Entropie-Erhaltungssätze bleiben unverändert.

Wir bezeichnen die <u>konvektive Zeitableitung</u> mit d_t.

Wähle lokale kartesische Koordinaten im erdfesten Bezugssystem:



$$\vec{\omega} = \left[\cos\theta\,\vec{e}_y + \sin\theta\,\vec{e}_z\right]\cdot\omega$$

Ansatz:

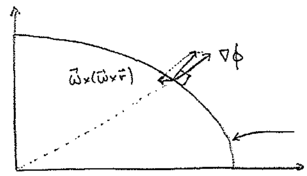
$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$$

(Keine Konvektion nach oben/unten)

Schreibe die Bewegungsgleichungen in expliziter Form:

$$d_t\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \underbrace{\left[\nabla\phi + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right]}_{\approx (0,0,g)} - \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}}_{2\omega \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix}}$$

$$2\omega \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\left(-v_y \sin\theta\, \vec{e}_x + v_x \sin\theta\, \vec{e}_y - v_x\cos\theta\, \vec{e}_z\right)$$



Gleichgewichtsform der (flüssigen) Erdoberfläche ist genau so dass es keine tangentialen Kräfte gibt

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + 2\omega\sin\theta\, v_y \\[2ex] \dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - 2\omega\sin\theta\, v_x \\[2ex] 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} - g + 2\omega\cos\theta\, v_x \end{cases}$$

Grössenordnungen:

$$v_x,\ v_y \sim 10\,\frac{m}{s} \qquad 2\omega \sim 10^{-4}\,\frac{1}{s}$$

$$2\omega v_x,\ 2\omega v_y \sim 10^{-3}\,\frac{m}{s^2}$$

$$\frac{dv_x}{dt},\ \frac{dv_y}{dt} \sim \frac{10\frac{m}{s}}{\text{Tag}} \sim \frac{10\frac{m}{s}}{10^5 s} \sim 10^{-4}\,\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10^{-4} \sim -10^{-3} + 10^{-3} \\ 10^{-4} \sim +10^{-3} - 10^{-3} \\ 0 \sim \underbrace{+10 - 10}_{} + 10^{-3} \end{cases}$$

Diese Terme müssen sich gegenseitig kürzen!

(i) Die grössten Terme:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = -g$$

Wie auf Seite 9; z.B. $\dfrac{1}{\rho}dp = \dfrac{d\rho}{\rho}\cdot\left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \dfrac{d\rho}{\rho}\, c_s^2$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} \approx -\frac{g}{c_s^2}\, dz$$

$$\Rightarrow \rho(z) \approx \rho(0)\exp\left(-\frac{g}{c_s^2}z\right);$$

$$\frac{c_s^2}{g} \sim \frac{10^5\,\frac{m^2}{s^2}}{10\,\frac{m}{s^2}} \sim 10^4\, m.$$

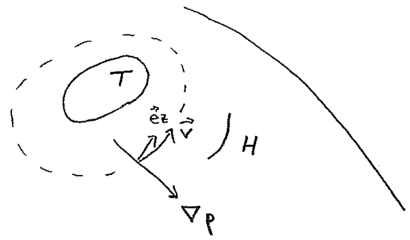
(ii) Die dominanten Terme in den x- und y- Komponenten: wir finden eine erste Näherung in dem wir $d_t v_x$ und $d_t v_y$ vernachlässigen.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{2\omega\varrho\sin\Theta} \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\omega\varrho\sin\Theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{vmatrix}$$

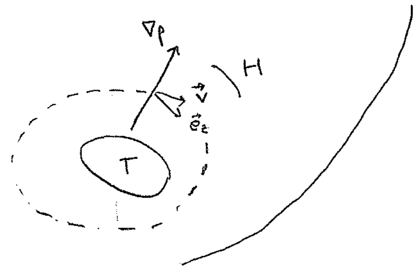
$$= \frac{\vec{e}_z \times \nabla p}{2\omega\varrho\sin\Theta}$$

„geostrophisches Gleichgewicht"
(zwischen ∇p und Coriolis-Kraft)

Tiefdruckgebiet (Zyklon) auf der Nordhalbkugel:

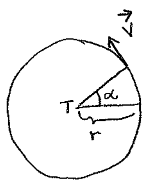


Südhalbkugel: $\sin\Theta < 0$!



$\Rightarrow$ „Barisches Gesetz" auf der Nordhalbkugel: Wind am Rücken $\Rightarrow$ Tiefdruck links.
Süd —"— : rechts.

(iii) Betrachte jetzt auch die konvektiven Zeitableitungen.
Ansatz: Zylindersymmetrie.



$$\begin{cases} v_x = -v(r)\sin\alpha \\ v_y = v(r)\cos\alpha \end{cases} \qquad \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \qquad \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -v(r)\cos\alpha \underbrace{\frac{d\alpha}{dt}}_{\frac{v(r)}{r}} \\ \frac{dv_y}{dt} = -v(r)\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p(r)}{\partial x} = p'(r)\cdot\cos\alpha \\ \frac{\partial p(r)}{\partial y} = p'(r)\sin\alpha \end{cases} \qquad \left(\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\alpha\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{v^2}{r}\cos\alpha = -\frac{1}{\varrho}p'(r)\cos\alpha + 2\omega\sin\Theta\, v\cos\alpha \\ -\frac{v^2}{r}\sin\alpha = -\frac{1}{\varrho}p'(r)\sin\alpha + 2\omega\sin\Theta\, v\sin\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \text{Ansatz ok!}$$

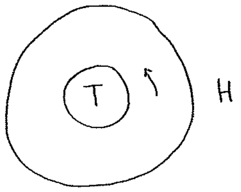
$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{v^2(r)}{r} = \frac{p'(r)}{\varrho(r)} - 2\omega \sin\Theta \, v(r)} \; *$$

Für große r kann die linke Seite vernachlässigt werden, und wir finden den geostrophischen Wind wieder; seine Geschwindigkeit ist also

$$v_{gs}(r) = \frac{p'(r)}{2\omega\varrho(r)\sin\Theta}$$

Für endliche r:

Tiefdruck:

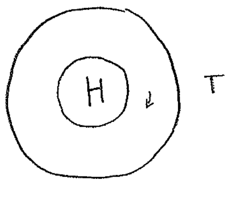


$$2\omega\sin\Theta \, v(r) = \underbrace{\frac{p'(r)}{\varrho(r)}}_{>0} - \underbrace{\frac{v^2(r)}{r}}_{>0}$$

$\Rightarrow$ $v(r) < v_{gs}(r)$ und wird kleiner in der Mitte.

$$\left(\sim r^{1/2} = \text{const} - \frac{(r^{1/2})^2}{r} \right)$$

Hochdruck:



$$p'(r) < 0 \quad \Rightarrow \quad v_{gs}(r) < 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2(r)}{r} = -\frac{|p'(r)|}{\varrho(r)} + 2\omega\sin\Theta\,|v(r)|$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\omega\sin\Theta\,|v(r)| = \frac{|p'(r)|}{\varrho(r)} + \frac{v^2(r)}{r}$$

Lösung mit $\frac{p'(0)}{\varrho(0)} \neq 0$, $|v(r)| \sim r^\alpha$?

$$\sim r^\alpha = \underbrace{\text{const}}_{>0} + \underbrace{\sim r^{2\alpha-1}}_{>0}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung!

Lösung mit $\frac{p'(0)}{\varrho(0)} = 0$, $|v(r)| \sim r^\alpha$?

$$\sim r^\alpha = 0 + \sim r^{2\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = 1$$

D.h. Druck muss fast konstant sein, und $v(r)$ ist klein!

Äquator:

$$\sin\Theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2(r)}{r} = \frac{p'(r)}{\varrho(r)}$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{r}{\varrho}\frac{\Delta p}{\Delta r}} \approx \sqrt{3000}\ \frac{m}{s} \sim 50\ \frac{m}{s}$$

$r \sim \Delta r \sim 100\,km$

$\Delta p \sim 30\,mb = 0{,}030 \times 10^5\ \frac{N}{m^2}$

$\varrho \sim \frac{1\,kg}{m^3}$

$\Rightarrow$ tropischer Wirbelsturm!

---

* Eine Gleichung für drei Unbekannten $(v(r), p(r), \varrho(r))$; uns fehlt Information aus der Kontinuitätsgleichung sowie aus der isentropischen / adiabatischen Zustandsgleichung.