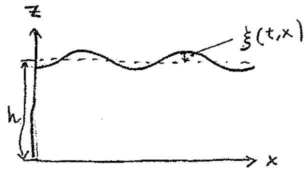
1.6 Schwerewellen [LL VI § 12, 13]

Als zweites Beispiel betrachten wir Schwerewellen, wobei auch Gravitation eine wichtige Rolle spielt.



Wasser sei wirbelfrei ($\nabla\times\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{v}=\nabla\varphi$) und inkompressibel ($\nabla\cdot\vec{v}=0$).

Bewegungsgleichungen (Seite 15):

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \\ \partial_t\varphi + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi = \text{const.} \end{cases} \quad ; \quad \phi = gz$$

Randbedingungen:

$* \; z=0 \Rightarrow v^z = 0 \Rightarrow \partial_z\varphi|_{z=0} = 0$

$** \; z = h+\xi :=$ Oberfläche $\Rightarrow p = p_0 =$ Luftdruck $=$ const.

$$\Rightarrow \left[\partial_t\varphi + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2}\right]_{z=h+\xi} + g\xi = -\frac{p_0}{\rho} - gh + \text{const.} \equiv 0$$

$***$ einmal auf der Oberfläche, immer auf der Oberfläche (ersetzt $v^z=0$)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\xi(t,x(t)) = v^z|_{z=h+\xi}$$

$$\Leftrightarrow \partial_t\xi + \underbrace{\partial_x\varphi}_{dx/dt=v^x}\,\partial_x\xi - \underbrace{\partial_z\varphi}_{v^z}|_{z=h+\xi} = 0 .$$

Ansatz: Ebene Welle: $\varphi(t,\vec{x}) = g(z)\cos(kx-\omega t)$.

$$\nabla^2\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d^2g}{dz^2} - k^2 g = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(t,\vec{x}) = \left[Ae^{kz} + Be^{-kz}\right]\cos(kx-\omega t).$$

Randbedingung bei $z=0 \Rightarrow k[A-B]\cos(kx-\omega t) = 0 \Rightarrow A=B$

$$\Rightarrow \underline{\varphi(t,\vec{x}) = C\cdot\cosh(kz)\cos(kx-\omega t)} .$$

Um weiter zu kommen, betrachten wir wieder die linearisierte Theorie: $\varphi = \text{const}$, $\xi = 0$ ist die statische Lösung 0. Ordnung, und $|\xi| \ll h$, $|\nabla\varphi|^2 \ll |\partial_t\varphi|$ eine mögliche Näherung 1. Ordnung

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = C\cosh(kz)\cos(kx-\omega t) \\ [\partial_t\varphi]_{z=h} + g\xi = 0 & (**) \\ \partial_t\xi - [\partial_z\varphi]_{z=h} = 0 & (***) \\ \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + g(h-z) - \partial_t\varphi \end{cases}$$

Soll auf der linken Seite $\frac{d}{dt}$ oder $\frac{\partial}{\partial t}$ stehen ??
Glücklicherweise spielt dies in der linearisierten Näherung keine Rolle!

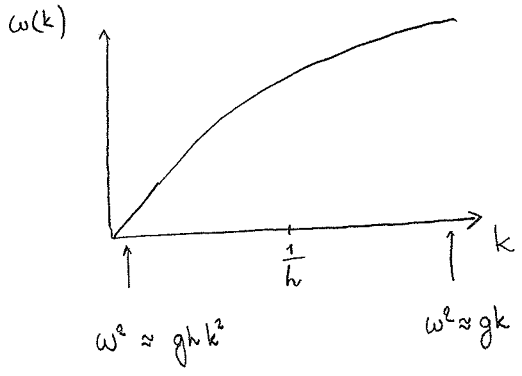
Kombiniere (**) und (***):

$$\xi = -\frac{1}{g}\left[\partial_t \varphi\right]_{z=h} \quad \Rightarrow \quad \left[\partial_t^2 \varphi + g\,\partial_z \varphi\right]_{z=h} = 0 .$$

Setze $\varphi = C\cosh(kz)\cos(kx-\omega t)$ ein:

$$-\omega^2 C \cosh(kh)\cos(kx-\omega t) + gk\, C \sinh(kh)\cos(kx-\omega t) = 0$$

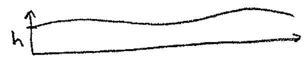
$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = gk\tanh(kh)}$$ „Dispersionsrelation"



$$\tanh(x) \approx \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} & \text{für } x \ll 1 \\ 1 - 2e^{-2x} & \text{für } x \gg 1 \end{cases}$$

Der Wellenvektor hat die Form $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, wobei λ die Wellenlänge bezeichnet.

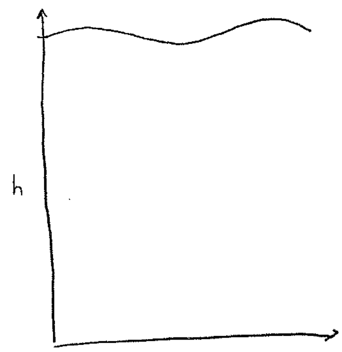
$k \ll \frac{1}{h} \Leftrightarrow \lambda \gg h \Leftrightarrow$ flaches Wasser



Gruppengeschwindigkeit $c_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gh}$;
unabhängig von λ, wird kleiner für $h \to 0$.

$k \gg \frac{1}{h} \Leftrightarrow \lambda \ll h \Leftrightarrow$ tiefes Wasser

$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$;
unabhängig von h,
wird kleiner
für $\lambda \to 0$.



Numerisch: $h = 10\,m$, $\lambda \gg h$ oder
$\lambda = 10m \cdot 8\pi$, $h \gg \lambda$

$$\Rightarrow \quad c_g \approx \sqrt{9{,}8\,\frac{m}{s^2}\cdot 10\,m} \approx 10\,\frac{m}{s} .$$

Andere Eigenschaften:

* Die Form der Oberfläche : $(**) \Rightarrow \xi = -\frac{1}{g}\left[\partial_t\varphi\right]_{z=h}$

$$= \underbrace{-C \cdot \frac{\omega}{g} \cdot \cosh(kh)}_{} \cdot \sin(kx-\omega t)$$

Amplitude ; muss $\ll h$ sein.

Bezeichne $\xi_0 := -C\frac{\omega}{g}\cosh(kh)$.

* Druck :

$$p = p_0 + \rho g(h-z) - \rho\,\partial_t\varphi$$
$$= p_0 + \rho g(h-z) - \rho\cdot\omega C \cosh(kz)\sin(kx-\omega t)$$
$$= p_0 + \rho g\left[h - z + \xi_0\frac{\cosh(kz)}{\cosh(kh)}\sin(kx-\omega t)\right]$$

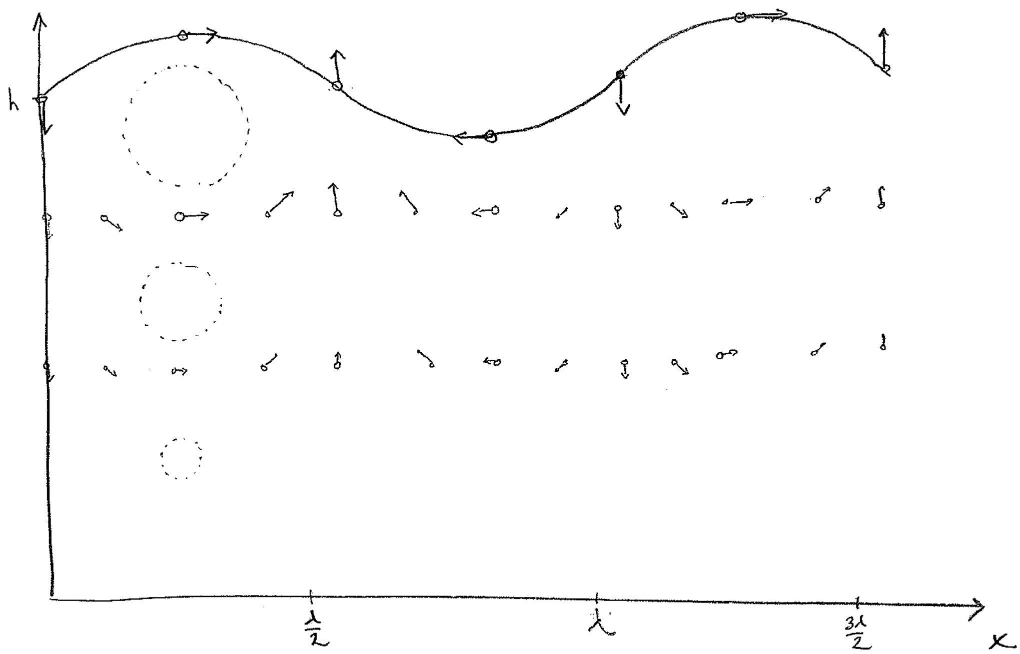
* Strömungsgeschwindigkeit:

$$v^x = \partial_x\varphi = -kC\cosh(kz)\sin(kx-\omega t)$$
$$= \frac{kg}{\omega}\cdot\frac{\cosh(kz)}{\cosh(kh)}\cdot\xi_0\sin(kx-\omega t)$$
$$v^z = \partial_z\varphi = kC\sinh(kz)\cos(kx-\omega t)$$
$$= \frac{kg}{\omega}\cdot\frac{\sinh(kz)}{\cosh(kh)}(-\xi_0)\cos(kx-\omega t)$$

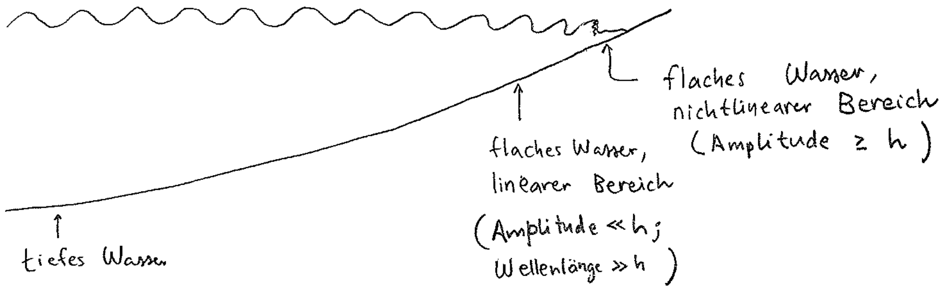
In tiefem Wasser ($kh \gg 1$) und für $z \approx h$:

$$\cosh(kh) \approx \frac{e^{kh}}{2}$$
$$\cosh(kz) \approx \sinh(kz) \approx \frac{e^{kz}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v^x = \frac{kg}{\omega}e^{k(z-h)}\xi_0\sin(kx-\omega t) \\ v^z = -\frac{kg}{\omega}e^{k(z-h)}\xi_0\cos(kx-\omega t) \end{cases}$$

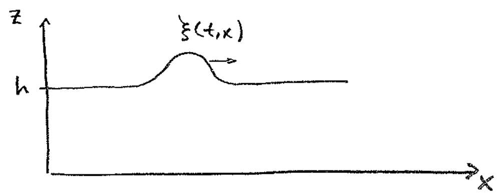


Was passiert wenn $\xi_0 \sim h$, d.h. nichtlineare Terme werden wichtig?
Seite 22: $c_g \sim \sqrt{gh}$ wird kleiner bei niedriger Tiefe h; Stau!
Seite 19: nichtlineare Terme können zu Unstetigkeiten führen.



Interessanterweise besitzen die nichtlinearen Gleichungen auch Lösungen, die „stationär" (d.h. ihre Form halten; „nichtdispersiv") und „lokalisiert" (ein „Wellenpaket") sind: Solitonen.

Zum Beispiel: eine lange Welle in einem flachen Kanal; Korteweg - de Vries - Soliton.
(Beobachtung < 1850, theoretische Erklärung 1895)



Ausgangspunkt: die selben Gleichungen wie auf Seite 21, aber behalte jetzt die führenden nichtlinearen Terme.

⋮

$$\Longrightarrow \quad \partial_t \xi + c_g \partial_x \xi + \frac{1}{6} c_g h^2 \partial_x^3 \xi + \frac{3 c_g}{2h} \xi \partial_x \xi = 0 \quad , \quad c_g = \sqrt{gh}$$

„KdV - Gleichung".

⋮

$$\Longrightarrow \quad \xi(t,x) = 2h \frac{V - c_g}{c_g} \cdot \frac{1}{\cosh^2\left[\sqrt{\frac{3(V-c_g)}{2 c_g h^2}}\,(x - Vt)\right]} \quad ; \quad V > c_g$$

Die Geschwindigkeit V ist „frei", aber bestimmt die Amplitude, d.h. wird durch die Anfangsbedingungen fixiert.
