1.5 Schallwelle, Stoßwelle [LL VI § 63, 79, 81-83]

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho \vec{v}) = 0 \\ \partial_t \vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \\ d s = 0 \end{cases} \qquad \rho = mn = \frac{mN}{V}, \quad s = \frac{S}{N}$$

Eine wichtige Klasse von Lösungen sind verschiedene Arten von Wellen. Wir betrachten zuerst das einfachste Beispiel, Schallwellen. Diese sind kleine „Störungen" um einen homogenen ruhenden Hintergrund. D.h., wir können die Gleichungen linearisieren.

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + \rho' & ; \rho' \ll \rho_0 \\ p = p_0 + p' & ; p' \ll p_0 \\ s = s_0 + s' & ; s' \ll s_0 \\ \vec{v} = 0 + \vec{v}' & ; |\vec{v}'| \ll c_s = \text{Schallgeschwindigkeit} \end{cases}$$

$\uparrow$ const, d.h. $\partial_t(\ ) = \nabla(\ ) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t \rho' + \rho_0 \nabla\cdot\vec{v}' = 0 \\ \partial_t \vec{v}' + \frac{1}{\rho_0}\nabla p' = 0 \\ d s' = 0 \end{cases}$$

(zur ersten Ordnung in kleinen Grössen)

Wir schreiben:

$$p' = \frac{p'}{\rho'}\rho' \overset{ds=0}{=} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho' =: c_s^2 \rho'$$

$$\nabla p' = c_s^2 \nabla \rho'.$$

Desweiteren, wie in der Elektrodynamik, suchen wir nach einer Lösung mit Hilfe der komplexen Fourier-Darstellung:

$$\rho' = \mathrm{Re}\left[\tilde{\rho}' e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

$$\vec{v}' = \mathrm{Re}\left[\tilde{\vec{v}}' e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -i\omega\tilde{\rho}' + \rho_0\, i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{v}}' = 0 \\ -i\omega\tilde{\vec{v}}' + \frac{c_s^2}{\rho_0} i\vec{k}\,\tilde{\rho}' = 0 \quad \Big|\ \cdot\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\omega & \rho_0 \\ \frac{c_s^2 \vec{k}^2}{\rho_0} & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}' \\ \vec{k}\cdot\tilde{\vec{v}}' \end{pmatrix} = 0$$

Eine nichttriviale Lösung existiert, falls $\det(\cdots) = 0$

$$\Leftrightarrow (\omega^2 - c_s^2\vec{k}^2) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \pm c_s|\vec{k}|}$$

Genau wie bei elektromagnetischen Wellen, aber Ausbreitung mit Schallgeschwindigkeit $c_s = \sqrt{(\partial p/\partial\rho)_s}$ statt Lichtgeschwindigkeit!

Bemerkungen:

(i) In der Elektrodynamik gilt (im Vakuum):

$\nabla\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{\tilde{E}}=0 \Rightarrow$ „transversale Welle".

Jetzt ist $\vec{k}\cdot\vec{\tilde{v}}'\neq 0$, d.h. „longitudinale Welle".

Für $\nabla\times\vec{v}=0$ hätten wir auch $\vec{v}=\nabla\varphi$ schreiben können, d.h. $\exists$ in der Tat nur einen Freiheitsgrad. (keine Polarization)

(ii) Für Luft:

$$p=\frac{Nk_BT}{V}\,,\quad E=\frac{c}{2}Nk_BT \qquad (\text{vgl. Seite } 10)$$

Betrachte S,V,N als Variablen wie in $dE=TdS-pdV+\mu dN$

$$\Rightarrow\quad c_s^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{S,N} \overset{\rho=\frac{mN}{V}}{=} -\frac{V^2}{mN}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{S,N}$$

$$\overset{p=\frac{Nk_BT}{V}}{=} -\frac{V^2}{mN}\cdot N\cdot\left[-\frac{k_BT}{V^2}+\frac{1}{V}\left(\frac{\partial k_BT}{\partial V}\right)_{S,N}\right]$$

Für $dS=dN=0$:

$$dE=-pdV \quad\Rightarrow\quad p=-\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N}=-\frac{c}{2}N\left(\frac{\partial k_BT}{\partial V}\right)_{S,N}$$

$$\Rightarrow\quad \left(\frac{\partial k_BT}{\partial V}\right)_{S,N}=-\frac{2p}{cN}=-\frac{2}{c}\cdot\frac{k_BT}{V}$$

$$\Rightarrow\quad c_s^2=\frac{1}{m}\left[k_BT+\frac{2}{c}k_BT\right]$$

$$c_s \overset{c\approx 5}{\approx} \sqrt{\frac{5+2}{5}\cdot\frac{1{,}38\times10^{-23}\,\frac{J}{K}\cdot 300K}{28\cdot 1{,}67\times10^{-27}\,kg}} \approx 350\,\frac{m}{s} \quad !$$

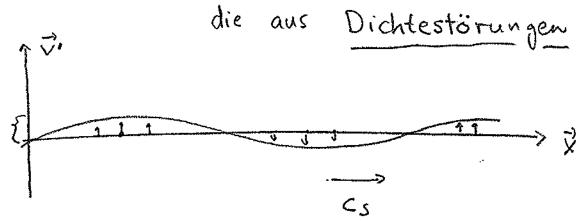
(iii) Physikalisch:

$\langle|\vec{v}_{N_2}|\rangle \sim 450\,\frac{m}{s}$ = Geschwindigkeit der einzelnen Moleküle (vgl. Seite 1)

$|\vec{v}'| \sim \frac{m}{s}$ = Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit

$c_s \sim 350\,\frac{m}{s}$ = Geschwindigkeit der „kollektiven" Welle, die aus Dichtestörungen besteht.

$|\vec{v}'|\ll c_s$



———— o ————

Falls die Amplitude der Welle groß genug ist, spielen auch die nichtlinearen Terme in den Bewegungsgleichungen eine Rolle. Dann kann es zu <u>Stoßwellen</u> kommen. Eine bemerkenswerte Tatsache:

> ∞-mal differenzierbare Anfangsbedingungen können in einer endlichen Zeit in eine Unstetigkeit (= Stoßwelle) übergehen! (vgl. Übungsblatt 2).

Der Einfachheit halber betrachten wir ein eindimensionales Problem:

Seite 17 $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \partial_t \rho + v\,\partial_x \rho + \rho\,\partial_x v = 0 \\ \partial_t v + v\,\partial_x v + \frac{1}{\rho}\partial_x p = 0 \\ ds = 0 \end{cases}$$

Wir nehmen ρ als Variable; wie früher gilt $\partial_x p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \partial_x \rho = c_s^2(\rho)\,\partial_x \rho$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t \rho + v\,\partial_x \rho + \rho\,\partial_x v = 0 \\ \partial_t v + v\,\partial_x v + \frac{c_s^2}{\rho}\partial_x \rho = 0 \end{cases}$$

<u>Ansatz:</u> ρ und v haben „dieselbe Phase", d.h. $v(t,x) = v(\rho(t,x))$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (i) & \partial_t \rho + v\,\partial_x \rho + \rho \frac{dv}{d\rho}\partial_x \rho = 0 \\ (ii) & \frac{dv}{d\rho}\partial_t \rho + v\frac{dv}{d\rho}\partial_x \rho + \frac{c_s^2}{\rho}\partial_x \rho = 0 \end{cases}$$

* $\left(\frac{dv}{d\rho}\right)(i) - (ii) \Rightarrow \left[\rho\left(\frac{dv}{d\rho}\right)^2 - \frac{c_s^2}{\rho}\right]\partial_x \rho = 0 \Rightarrow \frac{dv}{d\rho} = \pm \frac{c_s(\rho)}{\rho}$

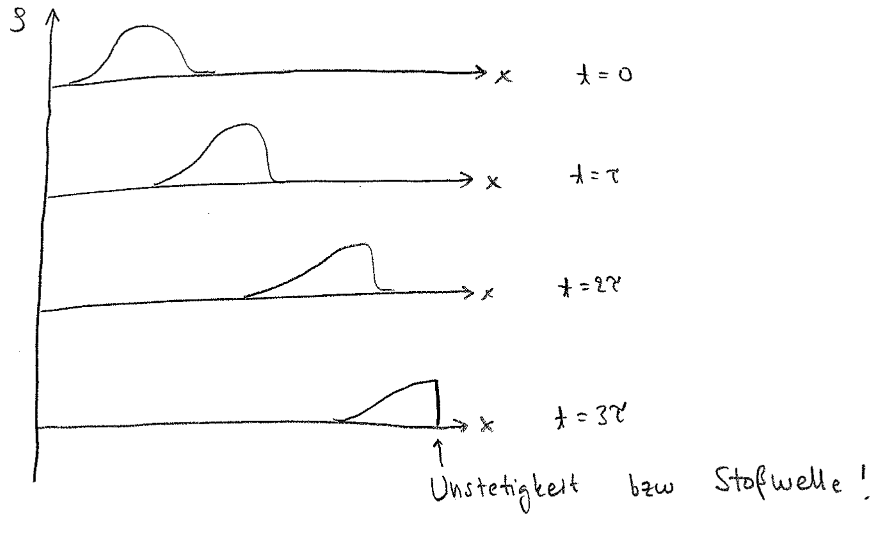
$$\Rightarrow v(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \, \frac{c_s(\rho')}{\rho'}$$

* $(i) \Rightarrow \underline{\underline{\partial_t \rho + [v(\rho) + c_s(\rho)]\,\partial_x \rho = 0}}$.

$\rho = \rho(x - ut) \Rightarrow u = c_s + v$

$\frac{dv}{d\rho} = \frac{c_s}{\rho} > 0 \Rightarrow$ Dichte Teile holen nach!

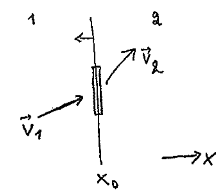
(Für $\frac{dv}{d\rho} = -\frac{c_s}{\rho}$ definiere $\tilde{v} = -v$ und $\tilde{x} = -x \Rightarrow$ nichts Neues)



Wie können wir eine Unstetigkeitsfläche beschreiben?

Wir nehmen an, dass die Stoßwelle eine konstante Geschwindigkeit hat, und betrachten die hydrodynamischen Gleichungen in ihrem Ruhesystem.

Allgemeine Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$ $\Rightarrow$ stationäres Ruhesystem $\partial_i j^i = 0$



$$\boxed{j^1(x<x_0) = j^1(x>x_0)}$$ $\Leftarrow$ integriere über ein unendlich dünnes Gebiet und benutze den Gaußchen Satz

Wie auf Seite 14:

Teilchenstrom $\vec{j} = \rho \vec{v}$ $\Rightarrow$ $\rho_1 v_1^x = \rho_2 v_2^x$ (1)

Impulsstrom $\pi^{ij} = p\delta^{ij} + \rho v^i v^j$ $\Rightarrow$ $p_1 + \rho_1 (v_1^x)^2 = p_2 + \rho_2 (v_2^x)^2$ (2)

$\rho_1 v_1^x v_1^y = \rho_2 v_2^x v_2^y$ (3)

$\rho_1 v_1^x v_1^z = \rho_2 v_2^x v_2^z$ (4)

Energiestrom $(\frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 + w)\vec{v}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}\rho_1 \vec{v}_1^2 + w_1\right) v_1^x = \left(\frac{1}{2}\rho_2 \vec{v}_2^2 + w_2\right) v_2^x$ (5)

(1) & (3) & (4) $\Rightarrow$ $v_1^y = v_2^y$ & $v_1^z = v_2^z$ $\Rightarrow$ mit einem Galilei-Boost entlang der Unstetigkeit können $v_1^y, v_2^y, v_1^z, v_2^z$ alle gleichzeitig zu Null gesetzt werden.

Bezeichne dann $j := \rho_1 v_1^x = \rho_2 v_2^x$. (2) $\Rightarrow$ $p_1 - p_2 = j\,(v_2^x - v_1^x)$ (a)

oder $p_1 - p_2 = j^2\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)$ (b)

<u>Bemerkungen:</u>

* $j > 0$ $\Rightarrow$ falls es in der Tat eine Unstetigkeit gibt, d.h. $p_1 \neq p_2$, und zwar $p_2 > p_1$, dann ist

  (a) $\Rightarrow$ $v_2^x - v_1^x = \frac{p_1 - p_2}{j} < 0$. $\Leftrightarrow$ $v_2^x < v_1^x$.

  D.h., Stoßwelle <u>zieht</u> Flüssigkeitsteilchen <u>mit</u> sich!

* Sei die Unstetigkeit sehr klein. Dann gilt:

  $$(b) \Rightarrow (v_1^x)^2 = \frac{j^2}{\rho_1^2} = \underbrace{\frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2}}_{\approx \frac{\partial p}{\partial \rho} \overset{!}{=} c_s^2} \underbrace{\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1^2}}_{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1^x}{v_2^x} > 1} \gtrsim c_s^2 .$$

  D.h., die Stoßwellengeschwindigkeit ist nah an der Schallgeschwindigkeit, sogar leicht supersonisch!

— o —