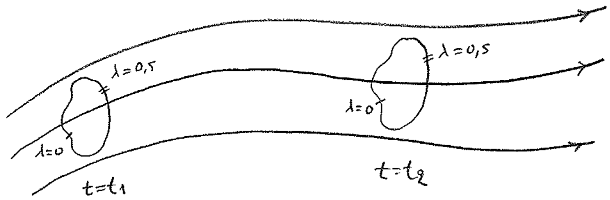
1.4 Erhaltung der Zirkulation; Potentialströmung. [LL VI § 8-10]

Wir schreiben die zeitabhängigen Grundgleichungen (1-4 I s) wie auf Seite 10:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho \vec{v}) = 0 & (1\,\mathrm{Is}) \\ \partial_t \vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\nabla\left(\frac{w}{\rho} + \phi\right) & (2\text{-}4\,\mathrm{Is}) \end{cases} \qquad \left(\frac{dp}{\rho} = d\left(\frac{w}{\rho}\right)\right)$$

<u>Definition:</u> Beschreibe $\vec{y}(t,\lambda)$, $\lambda \in (0,1)$, eine geschlossene Kurve, die sich mit der Flüssigkeit bewegt:



$$\frac{\partial \vec{y}(t,\lambda)}{\partial t} = \vec{v}(t, \vec{y}(t,\lambda))$$

Das Integral $\Gamma := \oint d\vec{y}\cdot\vec{v} = \int_0^1 d\lambda\, \frac{\partial \vec{y}}{\partial \lambda}\cdot\vec{v}$ heisst die <u>Zirkulation</u> entlang dieser Kurve.

<u>Behauptung:</u> $\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$ „Thomsonscher Satz"

<u>Beweis:</u>

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 d\lambda\, \frac{\partial \vec{y}(t,\lambda)}{\partial \lambda}\cdot \vec{v}(t, \vec{y}(t,\lambda))$$

$$= \int_0^1 d\lambda \left[\frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial t\,\partial\lambda}\cdot\vec{v} + \frac{\partial \vec{y}}{\partial \lambda}\cdot\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial y^i}{\partial t}\frac{\partial \vec{v}}{\partial y^i}\right)\right]$$

$$= \int_0^1 d\lambda \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \lambda}\cdot\vec{v} + \frac{\partial \vec{y}}{\partial \lambda}\cdot\left(\partial_t \vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right)\right]$$

$$= \int_0^1 d\lambda \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) - \frac{\partial \vec{y}}{\partial \lambda}\cdot\nabla\left(\frac{w}{\rho}+\phi\right)\right]$$

$$= \left[\frac{\vec{v}^2}{2}\right]_0^1 - \underbrace{\oint d\vec{y}\cdot\nabla\left(\frac{w}{\rho}+\phi\right)}_{\text{Stokes: } \int d\vec{f}\cdot\nabla\times\nabla\left(\frac{w}{\rho}+\phi\right) = 0}$$

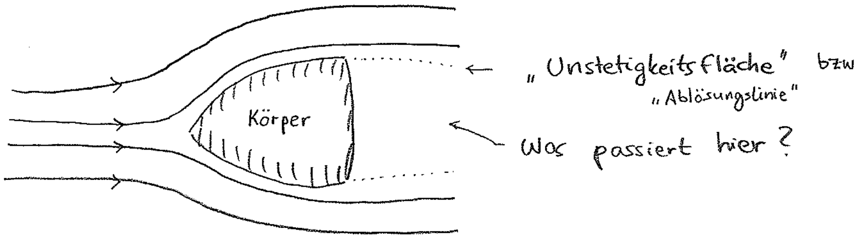
$$= 0. \qquad \square$$

<u>Bemerkungen:</u>

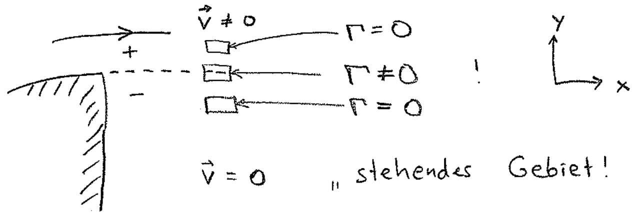
* Es war wichtig, dass auf der rechten Seite von (2-4 I s) eine $\nabla(\cdots)$ stand, d.h. dass die Strömung isentropisch war (Seite 10).

* Laut Stokes gilt $\Gamma = \oint d\vec{y}\cdot\vec{v} = \int d\vec{f}\cdot\nabla\times\vec{v}$.
  Ist die Strömung <u>wirbelfrei</u> $(\nabla\times\vec{v} = 0)$ irgendwo, bleibt sie also wirbelfrei in der Zukunft.

Aber:



In einer idealen Flüssigkeit:



An der Unstetigkeitsfläche müßen Teilchen-, Impuls- und Energiestrom immer noch erhalten bleiben! [LL VI § 81] Im stationären Fall:

(kommt etwas ausführlicher auf Seite 20)

$$(1/5) \Rightarrow \quad \underbrace{\rho_- v_-^y}_{0} = \underbrace{\rho_+ v_+^y}_{0}$$

„tangentielle Unstetigkeit", d.h. kein Strom durch

$$(2\text{-}4/5) \Rightarrow \quad \begin{cases} p_- + \rho_-(v_-^y)^2 = p_+ + \rho_+(v_+^y)^2 \\ \rho_- v_-^y v_-^x = \rho_+ v_+^y v_+^x \\ \rho_- v_-^y v_-^z = \rho_+ v_+^y v_+^z \end{cases} \Rightarrow p_- = p_+$$

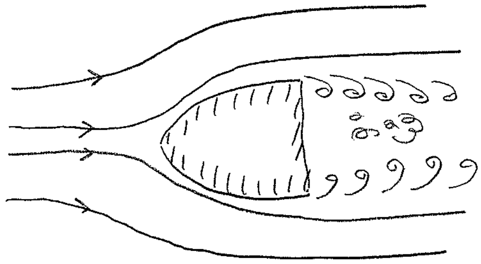
Druck ist stetig!

$$(5/5) \Rightarrow \quad \underbrace{v_-^y}_{0}\left(\frac{\rho_- v_-^2}{2} + w_-\right) = \underbrace{v_+^y}_{0}\left(\frac{\rho_+ v_+^2}{2} + w_+\right)$$

Mit Zähigkeit:

Es gibt keine Unstätigkeiten, aber $z = \frac{s}{n}$ bleibt auch nicht erhalten; es entsteht Wirbel bzw. Turbulenz.

(mehr dazu im Kapitel 1.10)



Im Allgemeinen: Bei Unstätigkeiten oder grossen Ableitungen gibt es Physik bei kurzen Abständen, d.h. die hydrodynamische Beschreibung wird ungenauer.

Abgesehen von Unstetigkeitsflächen bleibt aber Zirkulation erhalten; falls es ein Gebiet mit $\nabla\times\vec{v}=0$ gibt, ist dies der Fall in der ganzen darauf folgenden Strömung. Es geht dann um eine Potentialströmung.

Aus der Vorlesung Theorie I
(ein konservatives Kraftfeld in der Mechanik bzw. $\nabla\times\vec{E}=0$ in der Elektrostatik):
Für einfach zusammenhängende Gebiete (

) gilt:

$$\nabla\times\vec{v}=0 \iff \vec{v}=\nabla\varphi \;; \qquad \varphi(\vec{x})=\varphi(\vec{x}_0)+\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{x}'\cdot\vec{v}(\vec{x}')$$

Mit Hilfe von $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)-\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$ (Seite 12)
erhalten die Grundgleichungen aus Seite 13 die Form

$\boxed{\text{wirbelfreie Strömung:}}$

$$\begin{cases} \partial_t\rho+\nabla\cdot(\rho\nabla\varphi)=0 & (1/5)\\ \partial_t\nabla\varphi+\nabla\left(\frac{v^2}{2}+\frac{w}{\rho}+\phi\right)=0 & (2\text{-}4/5)\\ \Rightarrow\ \partial_t\varphi+\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+\frac{w}{\rho}+\phi=\text{const}. & (*)\end{cases}$$

Die Funktion φ heisst das Geschwindigkeitspotential. Eine Funktion (φ) statt drei ($\vec{v}$)!

Bemerkung: $(*)$ ist wie die Bernoullische Gleichung (Seite 11) aber gilt überall.

Ist die Flüssigkeit auch noch inkompressibel ($\rho=\text{const}$; vgl. Seite 9) können wir die Grundgleichungen als

$\boxed{\text{wirbelfreie inkompressible Strömung:}}$

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi=0 & (\text{Laplace})\\ \partial_t\varphi+\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\phi=\text{const} & (**)\end{cases}$$

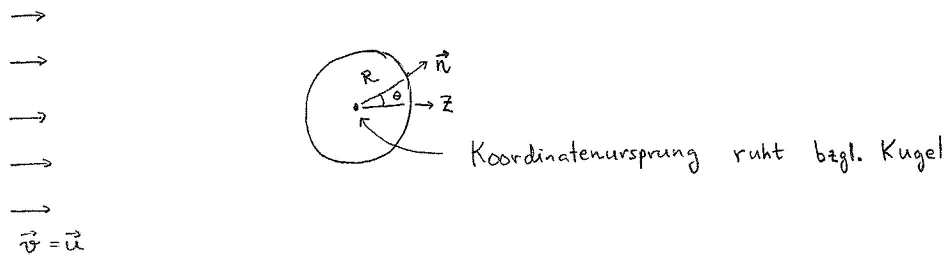
eine Gleichung für eine Funktion!

ausdrücken. Wir haben hier in der Herleitung von $(*)$ die Gleichung

$$\nabla\left(\frac{w}{\rho}\right)\underset{\text{Seite 10}}{=}\frac{\nabla p}{\rho}\underset{\rho\ \text{const}}{=}\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

benutzt. Diese Gleichungen sind endlich einfach genug, um in manchen Fällen auch explizit gelöst zu werden!

Beispiel: Eine Kugel (Radius R) befinde sich in einer inkompressiblen idealen Flüssigkeit mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{u}$.



Schreibe: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}\,'$; $\vec{v}\,' = \nabla\varphi'$; $\nabla^2\varphi' = 0$; $\lim\limits_{r\to\infty} \varphi' = 0$.

In Kugelkoordinaten: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$; $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

Nehme aus Symmetriegründen Ansatz mit $\ell = 1$, d.h. $\varphi' = A \frac{\cos\theta}{r^\alpha}$

Bestimmung von α:

$$\nabla^2\varphi' = \Big(\alpha(\alpha+1) - 2\alpha - 2\Big)\frac{\varphi'}{r^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \qquad \alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \quad \Big(\text{wegen } \lim_{r\to\infty}\varphi' = 0\Big)$$

Also:

$$\varphi' = A \, \frac{\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\cdot\vec{n}}{r^2} = \frac{A\vec{u}}{|\vec{u}|}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{v}\,' = \nabla\varphi' = \frac{A}{|\vec{u}|}\cdot\left\{\frac{\vec{u}}{r^3} - 3\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{r}\;\vec{r}}{r^5}\right\}$$

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Randbedingung: keine Strömung durch die Kugeloberfläche,

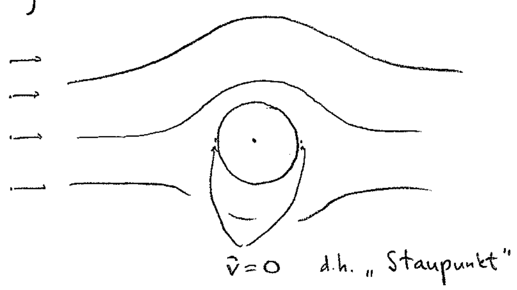
d.h.
$$\vec{v}\cdot\vec{n}\,\Big|_{r=R} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}\,'\cdot\vec{n}\,\Big|_{r=R} = -\vec{u}\cdot\vec{n}\,\Big|_{r=R}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{|\vec{u}|}\left\{\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{R^3} - 3\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{R^3}\right\} = -\vec{u}\cdot\vec{n} \qquad \Rightarrow A = \frac{1}{2}|\vec{u}|\,R^3$$

(Ansatz funktioniert!)

Fazit:
$$\vec{v} = \vec{u} + \frac{R^3}{2r^3}\left\{\vec{u} - 3\,\vec{u}\cdot\vec{n}\;\vec{n}\right\}$$



Der Druck könnte jetzt aus Gleichung (**) auf Seite 15 bestimmt werden.