1.3 Statische und stationäre Lösungen [LL VI §3,5]

Die Grundgleichungen idealer Flüssigkeiten mit Gravitationspotential ϕ:
(Konvention: Masse ausserhalb von ϕ, d.h. für eine Punktmasse gilt $\vec{F}_S = -m\nabla\phi$)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \\ \rho(\partial_t \vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}) = -\nabla p - \rho\nabla\phi \\ \partial_t\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + e + \rho\phi\right) + \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + w + \rho\phi\right)\vec{v}\right] = 0 \end{cases}$$

$\rho = mn \;;\; n = \frac{N}{V}$
$e = \frac{E}{V} \;;\; w = e + p$
$\left(w_{LL} = \frac{w_{\text{hier}}}{\rho_{\text{hier}}}\;!\right)$

Die allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen werden sehr kompliziert sein; wir betrachten deshalb zuerst den Fall, dass alles stationär ($\partial_t \equiv 0$, $\vec{v} \neq 0$) oder sogar statisch ($\partial_t \equiv 0$, $\vec{v} \equiv 0$, d.h. keine Strömungen).

Im letzteren Fall geht es um Hydrostatik (wie Elektrodynamik → Elektrostatik):

$$\Rightarrow \boxed{\nabla p = -\rho\nabla\phi}$$

Sei weiterhin $\phi := gz$, $g := 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$ (homogenes Schwerefeld).
Wir lösen die Gleichung in verschiedenen Näherungen.

(i) Sei $\rho = $ const, d.h. eine inkompressible Flüssigkeit.
(Gut für Wasser bei $T = 300\,K$, schlecht für Gase wie Luft.)

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \;;\; \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\Rightarrow p = p_0 - \rho g z$$

Beispiel: in der Tiefe von 10m gilt

$$p(-10m) = p(0m) + 1000\,\frac{kg}{m^3} \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \times 10\,m$$
$$\approx \underbrace{p(0m)}_{1\,atm} + \underbrace{10^5\,\frac{N}{m^2}}_{1\,atm} \approx 2\,atm$$

(atm ≈ bar)

(ii) Sei $T = $ const, d.h. „thermisches Gleichgewicht".
Wir betrachten jetzt ein ideales Gas.

$$\Rightarrow pV = Nk_BT$$
$$\Leftrightarrow p = n\cdot k_BT \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{m\cdot p}{k_BT}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{mg}{k_BT}\cdot p \quad \Rightarrow \quad p = p_0 \exp\left(-\frac{mg}{k_BT}\cdot z\right)$$

Beispiel: Luft (N_2) bei $T = 300\,K$: $\frac{k_BT}{mg} = \frac{1{,}38\times10^{-23}\,\frac{J}{K}\cdot 300K}{28\times1{,}67\times10^{-27}\,kg\times9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = \underbrace{9\,km}_{\text{Mount Everest!}}$

(iii) Sei $\hat{s} := \frac{s}{n} = \text{const}$, d.h. <u>isentropische Verteilung</u>.
Wie wir gelernt haben (Kapitel 1.2; Aufgabe 1.4) wäre dies für ideale Flüssigkeiten eine Identität, <u>falls</u> es eine Strömung gäbe.

Aus der Thermodynamik:

$$dE = TdS - pdV + \mu dN \quad ; \quad W := E + pV = \text{Enthalpie}$$

$$\Rightarrow dW = TdS + Vdp + \mu dN$$

Sei $N = \text{const}$, $dN = 0$

$$\Rightarrow d\left(\frac{W}{N}\right) = T\underbrace{d\left(\frac{S}{N}\right)}_{d\hat{s} = 0} + \frac{V}{N}dp \qquad \Big| \div m$$

$$\Rightarrow \boxed{d\left(\frac{w}{\rho}\right) = \frac{dp}{\rho}}$$

Damit bekommen wir:

$$\frac{\nabla p}{\rho} = -\nabla\phi \quad \Rightarrow \quad \nabla\left(\frac{w}{\rho} + \phi\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{w}{\rho} + gz = \text{const}.}$$

Betrachten wir wieder N_2 bei $T \approx 300\,K$. Was ist $\frac{w}{\rho}$?

Aus der Thermodynamik:

$$E \approx c \cdot N \cdot \frac{k_B T}{2}$$ „Äquipartition"

c: Zahl der Freiheitsgrade; N_2 ist starrer Körper, ein Zweiteilchensystem mit einer Zwangsbedingung

$$\Rightarrow c = 3 + 3 - 1 = 5$$

$$\Rightarrow e = \frac{E}{V} = \frac{c}{2} \cdot n \cdot k_B T$$

$$\Rightarrow w = \frac{W}{V} = e + p \underset{\text{Seite 9}}{=} e + n \cdot k_B T = \left(\frac{c}{2} + 1\right) n \cdot k_B T$$

$$\Rightarrow \frac{w}{\rho} = \left(\frac{c}{2} + 1\right) \cdot \frac{k_B T}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dz} = -\underbrace{\frac{mg}{\left(\frac{c}{2}+1\right) k_B}} = \text{const}.$$

$$\frac{28 \times 1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg} \times 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{7}{2} \times 1{,}38 \times 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}}} = \frac{9{,}5\,\text{K}}{\text{km}}$$

Beispiel: $T = 28{,}5°C$ bei $z = 0{,}5$ km

$\Rightarrow$ Nullgradgrenze bei $z = 3{,}5$ km !

—— ∘ ——

Stationäre Lösungen

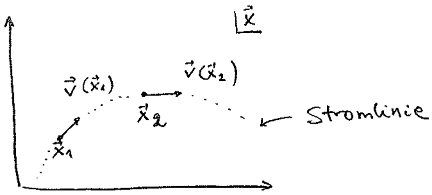
Es sei immer noch $\partial_t(\ldots) = 0$, aber die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}$ kann nichtverschwindend sein, wenn auch nur eine reine Ortsfunktion. Die Lage ist analog zu der in der Magnetostatik! Grundgleichungen:

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 & (1/5) \\ \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\nabla p - \rho\nabla\phi & (2\text{-}4/5) \\ \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + w + \rho\phi\right)\vec{v}\right] = 0 & (5/5) \end{cases}$$

Wir führen den Begriff der sogenannten Stromlinien ein:

Sei $\vec{x}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ein Lösung von

$$\frac{d\vec{x}(\lambda)}{d\lambda} = \vec{v}(\vec{x}(\lambda)) \quad \forall\, \lambda .$$



Dann beschreibt $\vec{x}(\lambda)$ eine Stromlinie. Bei einer stationären Strömung bleiben die Stromlinien zeitlich konstant, und stimmen mit den Bahnkurven der (durchschnittlichen) Flüssigkeitsteilchen überein (ersetze $\lambda \to t$!).

Ableitung einer Funktion entlang der Stromlinie:

$$\frac{d}{d\lambda} F(\vec{x}(\lambda)) = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial x^i} = \vec{v}\cdot\nabla F .$$

Betrachte jetzt (5/5):

$$0 = \nabla\cdot\left[\rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{w}{\rho} + \phi\right)\right]$$

$$= \rho\vec{v}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{w}{\rho} + \phi\right) + \left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{w}{\rho} + \phi\right)\underbrace{\nabla\cdot(\rho\vec{v})}_{= 0 \ (1/5)}$$

$$\nabla\cdot(\underbrace{\vec{g}}_{\rho\vec{v}} f) = \partial_i(g^i f) = g^i\partial_i f + f\partial_i g^i = \vec{g}\cdot\nabla f + f\nabla\cdot\vec{g}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{w}{\rho} + \phi\right) = 0, \quad \text{d.h.}$$

$$\boxed{\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{w}{\rho} + \phi = \text{const. entlang der Stromlinien}}$$

„Bernoullische Gleichung"

Bemerkungen:

(i) Der Wert der Konstanten ist im Allgemeinen für verschiedene Stromlinien verschieden.

(ii) $\vec{v}^2 \to 0 \quad \Rightarrow$ wir finden die statische Lösung auf Seite 10 wieder.

(iii) Wir haben die Gleichungen (2-4/5) auf Seite 11 noch nicht benutzt; gibt es da zusätzliche Informationen?

$$\frac{1}{\rho}\left(2\text{-}4/5\right) + \begin{matrix}\text{Entropie-}\\\text{erhaltung}\end{matrix} \text{ (Seite 10)} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + \nabla\left(\frac{w}{\rho}\right) + \nabla\phi = 0$$

Es gilt (benutze Summenkonvention!):

$$\begin{aligned}\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) &= \vec{e}_i\, \varepsilon_{ijk}\, v^j\, \varepsilon_{k\ell m}\, \partial_\ell v^m \\ &= \vec{e}_i\, v^j \partial_\ell v^m \left(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}\right) \\ &= \vec{e}_i\, v^j \partial_i v^j - \vec{e}_i\, v^j \partial_j v^i\end{aligned}$$

$$\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = v^j\partial_j\, \vec{e}_i v^i = \vec{e}_i\, v^j \partial_j v^i$$

$$\nabla\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = \vec{e}_i \partial_i \left(\frac{v^j v^j}{2}\right) = \vec{e}_i\, v^j \partial_i v^j$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = \nabla\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) - \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{w}{\rho} + \phi\right) = \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$$

Falls also die Strömung <u>wirbelfrei</u> ist, d.h. $\nabla\times\vec{v} = 0$ gilt, dann hat $\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{w}{\rho} + \phi$ denselben Wert <u>überall</u>, nicht nur entlang der Stromlinien!

Falls aber $\nabla\times\vec{v} \neq 0$ gilt, nehmen wir $\vec{v}\cdot$ auf beiden Seiten, und bemerken, dass $\vec{v}\cdot(\vec{v}\times \underset{\nabla\times\vec{v}}{\vec{c}}) = (\vec{v}\times\vec{v})\cdot\vec{c} = 0$ gilt; also nichts Neues bzgl. der uns schon bekannten Gleichung:

$$\vec{v}\cdot\nabla\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{w}{\rho} + \phi\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\lambda}\left(\quad \text{—\,''\,—} \quad \right) = 0 \qquad \text{Bernoulli}$$

— · —