## 1.2 Relativistische ideale Flüssigkeiten [LL VI, § 125, 126]

Die hydrodynamischen Grundgleichungen vom Kapitel 1.1 können am einfachsten mittels des relativistischen Formalismus hergeleitet werden! Dieses gibt uns auch die Gelegenheit, die relativistische Notation zu wiederholen.

* Koordinaten: $x^0 = ct$ ; $x^i$, $i = 1,2,3$ ; $x^\mu$, $\mu = 0,1,2,3$
* 4-Geschwindigkeit: $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{dx^\mu}{dt} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}}_{\gamma} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v^i \end{pmatrix}$

  „Eigenzeit" ($d\tau$)

* $u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu = (u^0, -u^i)$ ; $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

  Einstein-Summenkonvention

* Physikalische Grössen sind Lorentzinvariant, d.h. alle Indizes werden kontrahiert (einmal oben, einmal unten). Naturgesetze sind Lorentzkovariant, d.h. Indizes tauchen auf beiden Seiten der Gleichung gleicherweise auf.
* $u^\mu u_\mu = \frac{1}{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} \left( c^2 - \vec{v}^2 \right) = c^2 = \text{const.}$

— · —

### Teilchenzahlerhaltung

Wir betrachten Teilchendichte statt Massendichte, weil die Bedeutung von Masse in der Relativitätstheorie manchmal verwirrend ist.

Erhaltungsgrössen bilden einen 4-Strom; jetzt also

$$N^\mu := n u^\mu$$

$n$: Teilchendichte im LRS (im lokalen Ruhesystem); $u^\mu$: 4-Strömungsgeschwindigkeit.

Erhaltungsgesetz: $\partial_\mu N^\mu = 0$. (1.15)

Nachprüfung des nichtrelativistischen Limes ($\vec{v}^2 \ll c^2$):

$$u^\mu \approx \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \; ; \; N^\mu \approx \begin{pmatrix} nc \\ n\vec{v} \end{pmatrix} \; ;$$

$$0 = \partial_\mu N^\mu = \partial_0 N^0 + \sum_j \partial_j N^j$$

$$= \frac{\partial}{\partial(ct)} nc + \nabla \cdot (n\vec{v})$$

$$= \partial_t n + \nabla \cdot (n\vec{v}) \qquad \text{OK!}$$

## Energieimpulserhaltung

Energie und Impuls tauchen in der Relativitätstheorie sowieso als Komponente eines 4-Vektors auf; beide sind aber auch Erhaltungsgrössen, was einen weiteren Stromindex verlangt; wir setzen also die Information in einem 4-Tensor $T^{\mu\nu}$ (Energieimpulstensor) zusammen.

Im LRS: $\begin{cases} T^{00} := \text{Energiedichte} = \varepsilon \\ T^{ij} := \text{Impulsstromdichte} = p \cdot \delta^{ij} \end{cases}$

$\varepsilon$: relativistisch; enthält auch Restmassen

$p \cdot \delta^{ij}$: Seite 4: $\pi^{ij}$ mit $\vec{v} = 0$

Im Allgemeinen: $T^{\mu\nu}$ muss kovariant sein.

Die einzigen uns zur Verfügung stehenden Tensoren sind $u^\mu$ und $\eta^{\mu\nu}$ (falls das Medium homogen ist).

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} = A \cdot \eta^{\mu\nu} + B\, u^\mu u^\nu \quad !$$

Zurück zum LRS:

$$\begin{cases} T^{00} = \varepsilon = A + Bc^2 \\ T^{ij} = p\,\delta^{ij} = -A\,\delta^{ij} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -p \\ Bc^2 = \varepsilon - A = \varepsilon + p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{T^{\mu\nu} = -p\,\eta^{\mu\nu} + (\varepsilon + p)\,\frac{u^\mu u^\nu}{c^2}}$$

Energieimpulserhaltung: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$,

d.h. $\begin{cases} \partial_\mu T^{\mu i} = 0, & i = 1,2,3 \quad (2\text{-}4/5) \\ \partial_\mu T^{\mu 0} = 0 & (5/5) \end{cases}$

Das ist schon alles!

(Bemerkung: $T^{\mu\nu}$ ist symmetrisch, d.h. Energiestromdichte $\cdot \frac{1}{c}$ ($T^{i0}$) = Impulsdichte $\cdot c$ ($T^{0i}$)

Warum? Teilchen: 4-Impuls $P = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = mu = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{\vec{p}c}{E} = \frac{\vec{v}}{c}$$

$$\Rightarrow \underbrace{E\vec{v}}_{\text{Energiestrom}} \cdot \frac{1}{c} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Impuls}} \cdot c \quad \square$$
)

## Nachprüfung des nichtrelativistischen Limes :

Es gibt „grosse Terme" ($\propto c^2$) und Terme der Ordnung $c^0$ ; beide müssen betrachtet werden (Terme der Ordnung $\frac{1}{c^2}$ können dagegen vernachlässigt werden).

Schreibe : $\varepsilon = e + n m c^2 = e + \varrho c^2$

$e$ — nichtrelativistische innere Energiedichte

Jetzt :

$$T^{00} = -p + (\varrho c^2 + e + p) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} = -p + (\varrho c^2 + e + p)\left(1 + \frac{\vec{v}^2}{c^2} + \dots\right)$$

$$= \varrho c^2 + e + \varrho \vec{v}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

$$T^{0i} = (\varrho c^2 + e + p) \frac{v^i}{c\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)} = (\varrho c^2 + e + p) \frac{v^i}{c} \cdot \left(1 + \frac{\vec{v}^2}{c^2} + \dots\right)$$

$$= \varrho c v^i + \frac{v^i}{c}\left(e + p + \varrho \vec{v}^2\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

$$T^{ij} = (\varrho c^2 + e + p) \frac{v^i v^j}{c^2\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)} + p\,\delta^{ij} = p\,\delta^{ij} + \varrho v^i v^j + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

Außerdem:

$$m c N^0 = m c n \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \varrho c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{v}^2}{c^2} + \dots\right)$$

$$= \varrho c^2 + \frac{1}{2}\varrho \vec{v}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

$$m c N^i = m c n \frac{v^i}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \varrho c v^i \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{v}^2}{c^2} + \dots\right)$$

$$= \varrho c v^i + \frac{v^i}{c}\left(\frac{1}{2}\varrho \vec{v}^2\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

### Impulserhaltung :

$$0 = \partial_\mu T^{\mu i} = \frac{1}{c}\partial_t T^{0i} + \sum_{j=1}^{3} \partial_j T^{ji}$$

$$= \partial_t (\varrho v^i) + \sum_{j=1}^{3} \partial_j \pi^{ij} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

Genau wie auf Seite 4 !

(Bemerkung : $\pi^{ij} = p\,\delta^{ij} + \varrho v^i v^j$

$\varrho v^i v^j$ — Impulstransport durch Strömung

$p\,\delta^{ij}$ — Impulstransport durch Einzelmoleküle )

### Erhaltung von $T^{\mu 0} - m c N^\mu$ :

$$0 = \frac{1}{c}\partial_t\left(\frac{1}{2}\varrho \vec{v}^2 + e\right) + \sum_{j=1}^{3} \partial_j\left[\frac{v^j}{c}\left(\frac{1}{2}\varrho \vec{v}^2 + e + p\right)\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \partial_t\left(\frac{1}{2}\varrho \vec{v}^2 + e\right) + \nabla \cdot \left[\vec{v}\left(\frac{1}{2}\varrho \vec{v}^2 + w\right)\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

Genau wie auf Seite 4 !

— o —

# Isentropische Strömung

Wir zeigen letztendlich, dass Entropieerhaltung eine Folge von den Grundgleichungen $\partial_\mu N^\mu = 0 = \partial_\mu T^{\mu\nu}$ ist, falls $T^{\mu\nu}$ die Form einer idealen Flüssigkeit hat, d.h. $T^{\mu\nu} = -p\eta^{\mu\nu} + (\varepsilon + p)\frac{u^\mu u^\nu}{c^2}$.

Bausteine:

$*\quad E = TS - pV + \mu N \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = Ts - p + \mu n$

↳ Restmasse $mc^2$ hier!

$**\quad dE = TdS - pdV + \mu dN \quad \Rightarrow \quad SdT - Vdp + Nd\mu = 0 \quad | \div V$

$\Rightarrow \quad dp = s\,dT + n\,d\mu$ (Gibbs-Duhem)

[Oder: $dp(T,\mu) = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial T}}_{s} dT + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial \mu}}_{n} d\mu$ ]

$***\quad u^\mu u_\mu = c^2 \mid \partial_\nu \quad \Rightarrow \quad u^\mu \partial_\nu u_\mu = 0 \quad \forall\, \nu, t, \vec{x}$.

$$\Rightarrow \quad T^{\mu\nu} \overset{*}{=} -p\eta^{\mu\nu} + (Ts + \mu n)\frac{u^\mu u^\nu}{c^2} = -p\eta^{\mu\nu} + \frac{u^\nu}{c^2}\left[T(su^\mu) + \mu(nu^\mu)\right] \quad \Big| \,\partial_\mu$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\partial^\nu p + \frac{1}{c^2}(\partial_\mu u^\nu)[\dots] + \frac{u^\mu u^\nu}{c^2}\underbrace{\left[s\,\partial_\mu T + n\,\partial_\mu \mu\right]}_{** \Rightarrow \partial_\mu p} + \frac{u^\nu}{c^2}\Big[T\partial_\mu(su^\mu) + \mu \underbrace{\partial_\mu(nu^\mu)}_{0}\Big] \quad \Big| \cdot u_\nu$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -u_\nu \partial^\nu p + \frac{1}{c^2}\underbrace{(u_\nu \partial_\mu u^\nu)}_{*** \Rightarrow 0}[\dots] + \underbrace{\frac{u^\mu u^\nu u_\nu}{c^2}}_{u^\mu}\partial_\mu p + \underbrace{\frac{u^\nu u_\nu}{c^2}}_{1} \cdot T \cdot \partial_\mu(su^\mu)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \cancel{-u_\nu \partial^\nu p} + \cancel{u^\mu \partial_\mu p} + T\partial_\mu(su^\mu) \qquad \square.$$

---

Bemerkungen:

* Falls es dissipative Terme gibt (Viskosität, Wärmeleitfähigkeit, ...), gilt $\partial_\mu(su^\mu) > 0$, obwohl $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ !

* Unsere Dichten waren stets durch Volumen dividiert. Manchmal definiert man Dichten auch durch Division mit der Gesamtmasse der Flüssigkeit,

$$\tilde{s} := \frac{S}{M} = \frac{S}{V}\cdot\frac{V}{M} = \frac{s}{\rho} = \frac{s}{mn}$$

Hier muss man aufpassen! (vgl. z.B. LL)

---