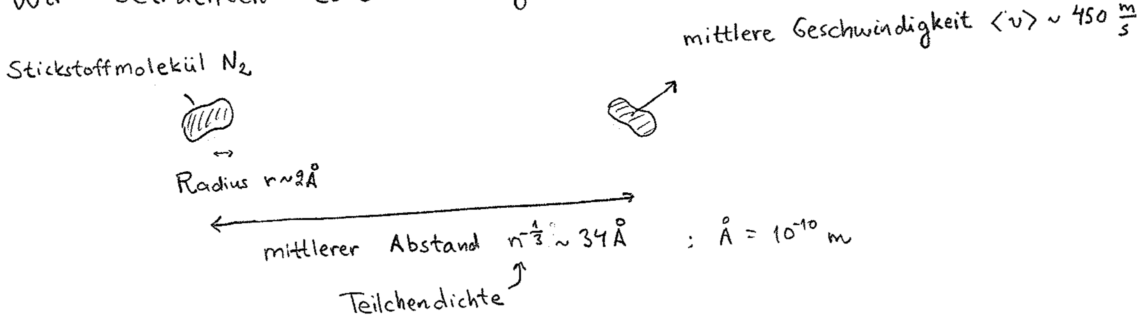
1. Hydrodynamik [Fließbach, Mechanik, Kap. 32]

1.1 Grundgleichungen [LL VI, §1, 2, 6, 7]

Wir betrachten eine Flüssigkeit oder ein Gas, z.B. Luft:



: Å $= 10^{-10}$ m

Freie Weglänge = Abstand zwischen Zusammenstössen $= \lambda \sim \frac{1}{n\sigma} \approx \frac{(34\text{Å})^3}{\pi (2\text{Å})^2} \approx 3000$ Å

Wirkungsquerschnitt $\sim \pi r^2$

Kollisionszeit = Zeitintervall zwischen Zusammenstössen $= \tau_c \sim \frac{\lambda}{\langle v \rangle} \approx \frac{3\times 10^{-7}\,m}{450 \frac{m}{s}} \approx 7\times 10^{-10}\,s$

Wir konzentrieren uns jetzt auf die Physik der grossen Abstände, $\Delta l \gg \lambda$, sowie der langsamen Variationen, $\Delta t \gg \tau_c$.

Freiheitsgrade bzw. Grundvariablen

* Teilchendichte $n = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Volumen}}$ bzw. Massendichte $\rho := mn$.
  Diese sind Funktionen von $\vec{x}$ und t.

* Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}(t,\vec{x})$: Mittelwert von mikroskopischen Geschwindigkeiten. Für jeden Raum-Zeitpunkt lässt sich ein spezielles „lokales Ruhesystem" (LRS) definieren, in dem $\vec{v}(t,\vec{x}) = 0$ gilt.

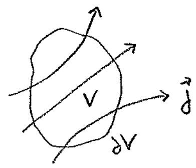
* Wegen den vielen Zusammenstössen herrscht lokales thermisches Gleichgewicht. D.h., im LRS können wir eine Temperatur $T(t,\vec{x})$, einen Druck $p(t,\vec{x})$, eine Energiedichte $e(t,\vec{x})$ usw. definieren.

  Es gelten die üblichen thermodynamischen Identitäten wie $E = TS - pV + \mu N$, $dE = TdS - pdV + \mu dN$, sowie eine Zustandsgleichung, z.B. $p = p(n,e)$.

Wir haben als Freiheitsgrade jetzt 5 <u>Felder</u> (z.B. $\rho(t,\vec{x})$, $\vec{v}(t,\vec{x})$, $p(t,\vec{x})$) und brauchen dementsprechend 5 <u>Feldgleichungen</u> für die Beschreibung ihrer Dynamik.

Die Gleichungen nehmen die Form von <u>Kontinuitätsgleichungen</u>, $\partial_t n + \nabla\cdot\vec{j} = 0$ (vgl. Theorie I), und beschreiben die <u>Erhaltung</u> <u>von Teilchenzahl</u>, <u>Impuls</u>, <u>und Energie</u>.

<u>Zur Erinnerung</u>:



Teilchenstrom durch Fläche ∂V:

$$J = \int_{\partial V} dJ = \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{j} \qquad (*)$$

Teilchenzahl innerhalb einer abgeschlossenen Fläche wird dabei kleiner:

$$\frac{dN}{dt} = -J$$

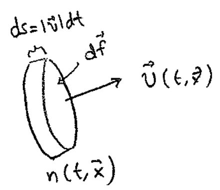
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\int_V d^3\vec{x}\; n(t,\vec{x}) = -\int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{j} \overset{\text{Gaußer Satz}}{=} -\int_V d^3\vec{x}\;\nabla\cdot\vec{j}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_V d^3\vec{x}\left(\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j}\right) = 0 .$$

Dieses gilt für ein beliebiges Volumenelement, auch infinitesimal klein

$$\Rightarrow \quad \partial_t n(t,\vec{x}) + \nabla\cdot\vec{j}(t,\vec{x}) = 0 \quad \forall\; t,\vec{x} .$$

Wie sieht $\vec{j}$ aus?



$$\underline{\underline{\vec{j}}} \overset{(*)}{=} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\,\frac{dJ}{|d\vec{f}|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\,\frac{dN}{dt\,|d\vec{f}|} = \vec{v}\cdot\frac{dN}{ds\,|d\vec{f}|} = \vec{v}\cdot\frac{dN}{dV} = \underline{\underline{\vec{v}\cdot n}}$$

Multipliziere das Ganze noch mit Masse m

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial\rho(t,\vec{x})}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho(t,\vec{x})\,\vec{v}(t,\vec{x})\right) = 0 .} \qquad (1/5)$$

Notabene:

$$\rho\vec{v} = mn\vec{v} = \frac{dN\cdot m\vec{v}}{dV} = \frac{\text{Teilchenzahl} \times (\text{mittlerer Impuls})}{\text{Volumen}}$$

$$= \underline{\underline{\text{Impulsdichte}}} .$$

Die Gleichungen für Impulserhaltung können aus dem 2. Newtonschen Gesetz $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ hergeleitet werden (durch Division mit Volumenelement).

Linke Seite:

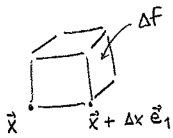
* $\frac{m}{\text{Volumen}} \to \rho$

* Die Newton-Gleichung gilt für Massenpunkte, die sich mit der Strömung bewegen, und dieses muss in Betracht gezogen werden:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} := \frac{d}{dt}\vec{v}(t, \vec{x}(t)) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\frac{dx^i}{dt}}_{v^i} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x^i} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}}_{\text{„konvektive Zeitableitung"}}$$

Rechte Seite:

* Druck $p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$. Betrachte Volumenelement um $\vec{x}$:



Kraftdichte in Richtung von $\vec{e}_1$:

$$\frac{\Delta f \cdot \left(p(t,\vec{x}) - p(t, \vec{x} + \Delta x\, \vec{e}_1)\right)\vec{e}_1}{\text{Volumenelement}}$$

$$= \frac{-\Delta f\, \Delta x \frac{\partial p}{\partial x^1}\vec{e}_1}{\Delta f\, \Delta x} = -\frac{\partial p}{\partial x^1}\vec{e}_1$$

Insgesamt:

$$\boxed{\rho(t,\vec{x})\left(\frac{\partial \vec{v}(t,\vec{x})}{\partial t} + \vec{v}(t,\vec{x})\cdot\nabla\,\vec{v}(t,\vec{x})\right) = -\nabla p(t,\vec{x})} \qquad (2\text{-}4/5)$$

„Euler-Gleichung"

Auf der rechten Seite können auch zusätzliche Kräfte auftauchen, z.B.

* $f_{\text{Schwerkraft}} = -\rho(t,\vec{x})\,\nabla\phi(t,\vec{x})$.
* f_{Coriolis}, $f_{\text{Zentrifugal}}$: Scheinkräfte in nichtinertialen Systemen
* $f_{\text{Viskosität}} = \underbrace{\eta}_{\text{„Scherviskosität"}} \nabla^2\vec{v} + \underbrace{\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)}_{\text{„Dehnviskosität"}} \nabla(\nabla\cdot\vec{v})$: „nichtideale Flüssigkeiten" bzw „dissipative Terme"

Euler-Gleichung mit $f_{\text{Viskosität}}$ heißt Navier-Stokes-Gleichung.

Wir können jetzt die Euler-Gleichung als Erhaltungsgleichung für die Impulsdichte und Impulsstrom umschreiben.

Definitionen:

* $g^i := \rho v^i$ = Impulsdichte (Seite 2)
* $\pi^{ij} := p\,\delta^{ij} + \rho v^i v^j$ = Impulsstromdichte in Richtung $\vec{e}_j$.

Behauptung:

$$\partial_t g^i + \sum_{j=1}^{3} \partial_j \pi^{ij} = 0 .$$

Beweis (für ideale Flüssigkeiten):

$$\partial_t(\rho v^i) + \sum_j \partial_j (p\,\delta^{ij} + \rho v^i v^j)$$
$$= (\partial_t \rho) v^i + \rho\,\partial_t v^i + \partial_i p + v^i \sum_j \partial_j(\rho v^j) + \sum_j \rho v^j \partial_j v^i$$
$$= v^i \underbrace{\left[\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\right]}_{(1/5)\ \Rightarrow\ 0} + \rho \underbrace{\left[\partial_t v^i + \vec{v}\cdot\nabla v^i\right]}_{(2\text{-}4/5)\ \Rightarrow\ -\partial_i p} + \partial_i p \quad = 0 \qquad \square .$$

— ∘ —

Uns fehlt noch die fünfte Gleichung. Es gibt hier verschiedene Vorgehensweisen:

(i) In manchen Systemen findet man eine „adiabatische" Zustandsgleichung der Form $p = p(\rho)$ [vgl. Fließbach, Mechanik, Kap. 32]. Dann gibt es nur vier unabhängige Felder und keine zusätzlichen Gleichungen werden gebraucht!

(ii) Für ideale Flüssigkeiten kann man die Erhaltung des Entropiestroms als zusätzliche Gleichung wählen [vgl. LL VI, § 2]:

$$\partial_t s + \nabla\cdot(s\vec{v}) = 0 \quad , \quad s := \frac{S}{V} .$$

Die Strömung ist dann isentropisch (bzw. adiabatisch und reversibel).

(iii) Wir werden Energie-Erhaltung als Grundgleichung betrachten (Entropie-Erhaltung ist eine Folge davon für ideale Flüssigkeiten):

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^{\,2} + e\right) + \vec{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^{\,2} + e + p\right)\vec{v}\right] = 0} \qquad (5/5)$$

(innere) Energiedichte

Energiestrom enthält nicht e sondern $w := e + p = \frac{E + pV}{V}$ = Enthalpiedichte!

Herleitung folgt im nächsten Kapitel!

— ∘ —