Übungen zu Theoretische Physik IV	**Blatt 9**

[Abgabe **07.07.2009** in der Nachbesprechung, Tutorien 09.-10.07.2009.]

Aufgabe A: Magnetohydrodynamik mit Kollisionsterm. Wir betrachten die magnetohydrodynamische Euler-Gleichung ohne Druckgradienten aber in Präsenz eines ,,Kollisionsterms":

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{e}{m_e}\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) - \nu\,\vec{v}\ ,$$

wobei ν die Kollisionsfrequenz bezeichnet. In diesem Fall brauchen wir die Leitfähigkeit nicht ,,von außen" einzuführen sondern sie wird dynamisch von den Kollisionen erzeugt. Das Magnetfeld habe die Form $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

(a) Seien zuerst $\vec{E} = 0$, $\nu = 0$. Bestimmen Sie die allgemeine Bahnkurve eines Elektrons und drücken Sie das Ergebnis mittels der Larmor-Frequenz $\omega_{\mathsf{L}} := eB/m_e c$ aus.

(b) Seien dann $\vec{E} \neq 0$ und $\nu \neq 0$ eingeführt, mit $\vec{E}\,||\,\vec{B}$. Wie benimmt sich v_z?

(c) Der Leitfähigkeitstensor σ^{ik} sei als $j^i = \sum_k \sigma^{ik} E^k$ definiert, wobei $\vec{j} := -en_e\vec{v}$. Falls $\vec{E}$ und $\vec{v}$ zeitabhängig aber klein sind, können die Gleichungen linearisiert und im Fourier-Raum gelöst werden. Bestimmen Sie $\sigma^{ik}(\omega)$ zuerst für $B = 0$, drücken Sie das Ergebnis mittels der Plasmafrequenz $\omega_{\mathsf{P}}^2 := 4\pi e^2 n_e/m_e$ aus, und vergleichen Sie mit der funktionalen Form des Lorentz-Modells.

(d) Bestimmen Sie letztendlich $\sigma^{ik}(\omega)$ für den allgemeinen Fall $\omega_{\mathsf{P}}, \omega_{\mathsf{L}} \neq 0$.

Aufgabe V1: Plasmawellen. Im Limes $\Gamma \to 0$ hat die dielektrische Funktion aus Aufgabe A vom Blatt 8 die Form $\epsilon(\omega) := 1 - \Omega^2/\omega^2$. Sei außerdem $\mu(\omega) = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass dies zur Dispersionsrelation $\omega^2 = \Omega^2 + c^2k^2$ führt.

(b) Skizzieren Sie die Phasengeschwindigkeit $v_{\mathsf{P}} = \omega/k$ sowie die Gruppengeschwindigkeit $v_{\mathsf{G}} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ als Funktionen von ω, und erläutern Sie die physikalischen Bedeutungen der Ergebnisse.

(c) Welche $\epsilon(\omega)$ bzw. $\mu(\omega)$ würde der Dispersionsrelation $\omega^2 = \omega_{\mathsf{P}}^2 + c_s^2 k^2$ entsprechen?

Aufgabe V2: Debye-Abschirmung. Falls eine Testladung $+Ze$ am Ort $\vec{x}_0$ sitzt, erfüllt das elektrische Potential ϕ in einem Plasma die Gleichung

$$(-\nabla^2 + k_{\mathsf{D}}^2)\phi = 4\pi e Z \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0)\ ,$$

wobei k_{D}^2 das Debye-Wellenvektor-Quadrat bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Lösung die Form

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Ze}{r} e^{-k_{\mathsf{D}} r}$$

hat, wobei r als $r := |\vec{x} - \vec{x}_0|$ definiert ist. [Hinweis: Eine Möglichkeit wäre, die Gleichung zuerst im Fourier-Raum zu lösen und dann zurückzutransformieren.]

Aufgabe V3: Kritisches Verhalten in Supraleitern. Wir betrachten das kritische Verhalten des supraleitenden Kondensats $|\psi|^2(T)$, der Eindringtiefe $\lambda(T)$, der Kohärenzlänge $\xi(T)$, der kritischen Feldstärke $H_c(T)$, sowie der Wärmekapazität $C(T) = -T\partial^2 F/\partial T^2$. Wenn diese Größen für $T \to T_c^-$ als $A(T_c - T)^\alpha$ bezeichnet werden, bestimmen Sie die Werte der Exponente α für die verschiedenen Fälle. [Bemerkung: Die Betrachtung gilt eigentlich nur für den Wert $\kappa = 1/\sqrt{2}$ des Ginsburg-Landau-Parameters, d.h. im Grenzfall zwischen Typ-I und Typ-II.]