Übungen zu Theoretische Physik IV	**Blatt 8**

[Abgabe **30.06.2009** in der Vorlesung, Tutorien 02.-03.07.2009. **Am Do 02.07.: D0-262!**]

Aufgabe A: Wellen im Metall. Betrachtet wird ein Metall mit der dielektrischen Funktion

$$\epsilon(\omega) := 1 - \frac{\Omega^2}{\omega(\omega + i\Gamma)}$$

und der Permeabilität $\mu(\omega) := 1$. Keine externen Ladungen sind vorhanden: $\rho_{\text{ext}} = 0$, $\vec{j}_{\text{ext}} = 0$.

(a) Sei zuerst $\Gamma \ll \Omega \ll \omega$. Zeigen Sie, dass der Brechungsindex $n = n_r + i\kappa$ in diesem Bereich reell ist, mit $n_r \approx 1$. (Physikalisch bedeutet dies, dass das Metall im ultravioletten Bereich **transparent** ist.)

(b) Sei jetzt $\Gamma \ll \omega \ll \Omega$. Zeigen Sie, dass der Brechungsindex $n = n_r + i\kappa$ in diesem Bereich rein imaginär ist. (Physikalisch bedeutet dies, dass keine Wellenbewegung stattfinden kann und dass das Metall das Licht vollständig **reflektiert**, d.h. als Spiegel funktioniert.)

(c) Letztendlich wird der Fall $\omega \ll \Gamma \ll \Omega$ betrachtet. Eine Welle bewege sich in die positive z-Richtung. Zeigen Sie, dass ihr Betrag als

$$|\vec{E}| \sim \exp(-z/d_{\text{skin}})$$

gedämpft wird, mit $d_{\text{skin}} = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$, wobei $\sigma := \Omega^2/4\pi\Gamma$ die Leitfähigkeit ist. Dieser Effekt heißt **Skineffekt**.

Aufgabe V1: Telegraphengleichung. Sei $\epsilon(\omega) := \epsilon_0 - \Omega^2/i\omega\Gamma$ und $\mu(\omega) := \mu_0$. Zeigen Sie, dass das elektrische Feld die sogenannte Telegraphengleichung erfüllt:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_{\text{eff}}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{4\pi\mu_0\sigma}{c^2}\partial_t\vec{E}(t,\vec{x}) \ ,$$

wobei $c_{\text{eff}} := c/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ und $\sigma := \Omega^2/4\pi\Gamma$. [Ursprung: Fortpflanzung von Telegraphiesignalen auf Seekabeln.]

Aufgabe V2: Resonanzfläche. Die dielektrische Funktion des Lorentz-Modells wird in die alternative Form

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{C_0\omega_0}{\omega_0^2 - (\omega + i\gamma)^2}$$

umgeschrieben, wobei nur eine Resonanz betrachtet wird. Zeigen Sie, dass die Fläche F unter der Spektralfunktion $\text{Im}\,\epsilon(\omega)$, d.h.

$$F := \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} d\omega \, \text{Im}\,\epsilon(\omega) \ ,$$

im Limes $\gamma \to 0$ unabhängig von ω_0, γ und $\Delta\omega$ ist. [Hinweis: Erinnern Sie sich an verschiedene Darstellungen der Diracschen δ-Funktion.]

Aufgabe V3: Kramers-Kronig-Relationen. Die dielektrische Funktion erfüllt die Beziehung

$$\epsilon(\omega) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\text{Im}\,\epsilon(\omega')}{\omega' - \omega - i0^+} \ .$$

Verifizieren Sie mindestens die Richtigkeit des Imaginärteils dieser Beziehung [Hinweis: Eine allgemeine Analyse: Landau-Lifschitz, Elektrodynamik der Kontinua, §62].