Übungen zu Theoretische Physik IV	**Blatt 4**

[Abgabe **19.05.2009** in der Vorlesung, Tutorien 28.-29.05.2009]

Aufgabe A: Quantisierter Wirbel. Die stationäre Gross-Pitajewski-Gleichung lautet

$$\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi = -\mu\psi + 2\lambda|\psi|^2\psi \ ,$$

wobei ψ eine komplexe Wellenfunktion ist, $\psi(\vec{x}) = f(\vec{x})\exp(i\alpha(\vec{x}))$.

(a) Wir betrachten zuerst einen zweidimensionalen Raum mit Koordinaten r, z, und nehmen den Ansatz $f = f(r), \alpha =$ const. Zeigen Sie, dass die Gross-Pitajewski-Gleichung nach einer angemessenen Skalierung $f = f_0\hat{f}$, $r = r_0\hat{r}$ in die folgende Form umgeschrieben werden kann:

$$\hat{f}''(\hat{r}) + \hat{f}(\hat{r}) - \hat{f}^3(\hat{r}) = 0 \ .$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung der vorigen Gleichung mit den Randbedingungen $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}'(\infty) = 0$. [Hinweis: Bedienen Sie sich des Ansatzes $\hat{f}(\hat{r}) = a\tanh(b\hat{r})$.]

(c) Wir betrachten demnächst einen dreidimensionalen Raum, mit Zylinderkoordinaten r, θ, z, und benutzen den Ansatz $f = f(r), \alpha = \theta n$. Zeigen Sie, dass die Gross-Pitajewski-Gleichung die Form

$$\hat{f}''(\hat{r}) + \frac{\hat{f}'(\hat{r})}{\hat{r}} - \frac{n^2\hat{f}(\hat{r})}{\hat{r}^2} + \hat{f}(\hat{r}) - \hat{f}^3(\hat{r}) = 0$$

erhält. Bestimmen Sie die zwei führenden Terme des asymptotischen Verhaltens bei $\hat{r} \to 0$ und $\hat{r} \to \infty$ für $|n| = 1$, und skizzieren Sie die ganze Funktion $\hat{f}(\hat{r})$.

(d) Zeigen Sie, dass die gefundene Lösung die in der Vorlesung hergeleitete suprafluide Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}_s = (n\hbar/mr)\vec{e}_\theta$ wiedergibt, und dass bei der Bestimmung der Energiedichte $\Delta E_s/L = \int_\xi^R \mathrm{d}r\, r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \frac{1}{2}\rho_s(r)\vec{v}_s^2(r)$ die untere Grenze ξ jetzt zum Null gesetzt werden kann. Wie ist es mit der oberen Grenze R?

Aufgabe V1: Schallgeschwindigkeit in ultrarelativistischer Materie. Wir betrachten eine ideale Flüssigkeit mit $T^{\mu\nu} := -p\eta^{\mu\nu} + (\epsilon + p)u^\mu u^\nu/c^2$. Es sei angenommen, dass es keine thermodynamisch bedeutende erhaltene Teilchenzahl N gibt; die Energiedichte ϵ kann folglich als Funktion von nur einer Variable ausgedrückt werden, $\epsilon = \epsilon(p)$.

(a) Leiten Sie, ausgehend von der Energieimpulserhaltung $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, den Ausdruck $c_s^2 = c^2/\epsilon'(p)$ für die Schallgeschwindigkeit her.

(b) Betrachten wir eine Materie deren Zustandsgleichung durch das Stefan-Boltzmannsche Gesetz gegeben wird, $p = \frac{g\pi^2(k_BT)^4}{90(\hbar c)^3}$, wobei g die Zahl der Freiheitsgrade ist (z.B. $g = 2$ für die Schwarzkörperstrahlung). Bestimmen Sie c_s/c in diesem Fall.

Aufgabe V2: Kanonische Variablen in der Präsenz eines elektromagnetischen Feldes. In der Vorlesung [18.05.2009] wurde die Wirkung $S = S_m + S_{mf}$ eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld gegeben. Zeigen Sie, dass diese in Form des Linienintegrals

$$S_m + S_{mf} = -\int_a^b \mathrm{d}x_\mu\, P^\mu$$

geschrieben werden kann. Hier ist $P^\mu := (H/c, p^i)$, wobei H die Hamilton-Funktion und p^i die Komponente des kanonischen Impulses bezeichnen. Drücken Sie desweiteren H als Funktion von p^i aus.