Übungen zu Theoretische Physik IV	**Blatt 3**

[Abgabe **12.05.2009** in der Vorlesung, Tutorien 14.-15.05.2009]

Aufgabe A: Eindimensionale Ähnlichkeitsströmung. Im Bereich $x \geq 0$ ruht eine ideale Flüssigkeit mit Druck p_0 und Massendichte ρ_0; der Bereich $x < 0$ ist leer ($p = \rho = 0$). Die adiabatische Zustandsgleichung hat die Form

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma , \quad \gamma > 1 ,$$

woraus die Schallgeschwindigkeit durch $c_s^2(\rho) = \partial p/\partial\rho$ bestimmt werden kann. Am Zeitpunkt $t = 0$ wird der Behälter geöffnet, und die Flüssigkeit strömt in den Bereich $x < 0$. Es sei $v(t, x)$ zu bestimmen. [Hinweis: Landau-Lifschitz, Hydrodynamik, §92].

(a) Wir nehmen an, dass alle Abhängigkeit von x und t in der Kombination $\xi := x/t$ auftritt. Zeigen Sie, dass die Kontinuitäts- und Euler-Gleichungen die folgenden Formen erhalten:

$$\begin{aligned} [\xi - v(\xi)]\rho'(\xi) &= \rho(\xi)v'(\xi) , \\ \rho(\xi)[\xi - v(\xi)]v'(\xi) &= c_s^2(\rho(\xi))\rho'(\xi) . \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit entweder $\xi - v(\xi) = c_s(\rho(\xi))$ erfüllt oder konstant ist, wobei im ersten Fall die Schallgeschwindigkeit die Form $c_s^2(\rho) = c_0^2(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}$ hat, mit $c_0 := c_s(\rho_0)$.

(c) Leiten Sie aus den Ergebnissen von (a) und (b) zuerst die Beziehung

$$v(\xi) = a + \frac{2c_s(\rho(\xi))}{\gamma - 1}$$

her, wobei a eine Konstante ist. Die Randbedingung, dass $v(\xi)$ innerhalb der Flüssigkeit stetig sei, fixiert den Wert von a. Zeigen Sie letztendlich, dass (in einem bestimmten ξ-Bereich) der Betrag von v gegeben wird von

$$|v(\xi)| = \frac{2}{\gamma + 1}(c_0 - \xi) .$$

(d) Skizzieren Sie die Massendichte $\rho(\xi)$ sowie die Stromlinien $x(t)$, und zeigen Sie insbesondere, dass die Information über die Eröffnung des Behälters links mit der Geschwindigkeit $2c_0/(\gamma - 1)$ propagiert, während sie sich rechts mit der Schallgeschwindigkeit c_0 bewegt.

Aufgabe V1: Wärmediffusion und Dämpfung. In der Vorlesung wurde die Gleichung $\partial_t e = \nabla \cdot (\kappa\nabla T)$ hergeleitet, wobei κ die Wärmeleitfähigkeit bezeichnet. Seien $C := \partial e/\partial T$ und κ Konstanten, und $\chi := \kappa/C$. Lösen Sie $T(t, \vec{x})$ für $z < 0$ mit der Randbedingung, dass auf der Ebene $z = 0$ die Temperatur räumlich konstant sei und die Zeitabhängigkeit $T = T_0 \cos(\omega t)$ aufzeige. In welcher Tiefe sind die Wärmeschwankungen 10% derjenigen auf der Ebene $z = 0$?

Aufgabe V2: Messung der Dehnviskosität. Der dissipative Teil des Energieimpulstensors lautet

$$-\Delta\Pi^{ij} = \eta(\partial_i v^j + \partial_j v^i - \frac{2}{3}\delta^{ij}\nabla \cdot \vec{v}) + \zeta\delta^{ij}\nabla \cdot \vec{v} .$$

Wir betrachten eine radiale Strömung, d.h. $\vec{v} = v(r)\vec{e}_r$. Es wird die Radialkomponente der Kraft (F_r in $\vec{F} = F_r\vec{e}_r + ...$) gemessen, die die Flüssigkeit auf einen kugelsymmetrischen Behälter übt. Bestimmen Sie eine Form von $v(r)$, so dass nur die Dehnviskosität ζ einen Beitrag zur F_r gibt.