Übungen zu Theoretische Physik IV	**Blatt 2**

[Abgabe **05.05.2009** in der Vorlesung, Tutorien 07.-08.05.2009]

Aufgabe A: Differentielle Form des Thomsonschen Satzes.

(a) Die ,,Wirbligkeit" $\vec{\omega}$ wird als $\vec{\omega} := \nabla \times \vec{v}$ definiert. Zeigen Sie, dass in einer idealen Flüssigkeit die Gleichung $\partial_t \vec{\omega} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega})$ gilt.

(b) Ein stationärer ,,Wirbel" sei eine Strömung der Form $\vec{\omega} := A\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\vec{e}_3$. Bestimmen Sie die entsprechende Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}$. [Hinweis: Laut Stokes ist $\int_F \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{\omega} = \oint_{\partial F} \mathrm{d}\vec{x} \cdot \vec{v}$; benutzen Sie außerdem Symmetrieargumente.]

(c) Wir betrachten jetzt eine inkompressible Flüssigkeit mit nichtverschwindender Scherviskosität η, wobei die Euler-Gleichung die Form

$$\rho(\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

erhält. Wie benimmt sich die Wirbligkeit als Funktion der Zeit in diesem Fall? [Hinweis: Identifizieren Sie einen ,,diffusiven Teil" in der Bewegungsgleichung und erinnern Sie sich an die allgemeinen Eigenschaften diffusiver Bewegung.]

Aufgabe V1: Rotierende Flüssigkeit im Schwerefeld. Berechnen Sie die Form der Oberfläche einer inkompressiblen idealen Flüssigkeit in einem zylindrischen senkrechten Kolben im Schwerefeld, der sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_3$ um die eigene Achse dreht. Die Flüssigkeit rotiere mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit mit. [Hinweis: Landau-Lifschitz, Hydrodynamik, §10].

Aufgabe V2: Zweidimensionale Potentialströmung. Betrachten Sie eine inkompressible Potentialströmung in zwei Dimensionen. Es seien φ das Potential $[\nabla \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \nabla\varphi]$ und ψ die sogenannte Strömungsfunktion $[\nabla \cdot \vec{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0 \Rightarrow v_x = \partial_y \psi, v_y = -\partial_x \psi]$. Die komplexe Variable z ist definiert durch $z = x + iy$.

(a) Zeigen Sie dass das durch $w := \varphi + i\psi$ definierte komplexe Potential eine analytische Funktion von z ist, indem sie die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nachprüfen.

(b) Zeigen Sie, dass $dw/dz = v_x - iv_y$ gilt.

(c) Betrachten Sie $w(z) = Az^n$ mit $n \geq 1/2$ und reellem A. Zeigen Sie: Mit diesem Potential können Sie die Strömung an der Ecke zwischen zwei Wänden, die den Winkel $\alpha = \pi/n$ einschließen, beschreiben. [Hinweis: Landau-Lifschitz, Hydrodynamik, §10].

Aufgabe V3: Unviskose Burgers-Gleichung. Falls wir in der eindimensionalen Euler-Gleichung den Druck vernachlässigen, bekommen wir die sogenannte unviskose Burgers-Gleichung:

$$\partial_t v(t,x) + v(t,x)\partial_x v(t,x) = 0\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lösung durch die implizite Gleichung

$$v(0,x) = v(t, x + t\,v(0,x))$$

gegeben wird, wobei $v(0,x)$ die Anfangsbedingung darstellt. [Hinweis: `en.wikipedia.org` $\to$ Burgers' equation.]

(b) Sei $v(0,x) := \exp(-x^2)$. Zeigen Sie, dass am Zeitpunkt $t = \sqrt{e/2}$ eine Unstetigkeit entsteht, und zwar vorerst bei $x = \sqrt{2}$.