9. Schlusswort

9.1 Lösung der Probeklausur

Es gibt höchstwahrscheinlich je eine Aufgabe zu $\left\{\begin{array}{l}\text{Newtonsche Mechanik}\\ \text{Lagrange bzw. Hamilton}\\ \text{Elektrodynamik}\\ \text{Relativitätstheorie}\end{array}\right.$

Aufgabe 1:

$$\vec{p} = \sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\vec{x}}_a \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = \sum_{a=1}^{N} m_a \ddot{\vec{x}}_a = \sum_{b\neq a} \vec{F}_{ba}$$

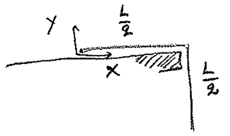
$$= \frac{1}{2} \sum_{b\neq a} \left(\vec{F}_{ba} + \vec{F}_{ab}\right) \underset{\text{Newton III}}{=} 0$$

$$\vec{L} = \sum_{a=1}^{N} m_a \vec{x}_a \times \dot{\vec{x}}_a \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \sum_a m_a \vec{x}_a \times \ddot{\vec{x}}_a$$

$$= \sum_{b\neq a} \vec{x}_a \times \vec{F}_{ba} = \frac{1}{2} \sum_{b\neq a} \left(\vec{x}_a \times \vec{F}_{ba} + \vec{x}_b \times \vec{F}_{ab}\right)$$

$$\underset{\text{Newton III}}{=} \frac{1}{2} \sum_{b\neq a} (\vec{x}_a - \vec{x}_b) \times \vec{F}_{ba} = 0 \quad \text{für } \vec{F}_{ba} \parallel \vec{x}_a - \vec{x}_b$$

Aufgabe 2:



$q :=$ x-Koordinate des Rückendes

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \mu L \dot{q}^2$$

$$V = \int dm\, g\, y = \int_{-(\frac{L}{2}+q)}^{0} dy\, \mu g y = -\frac{1}{2} \mu g \left(\frac{L}{2}+q\right)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} \mu L \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \mu g \left(\frac{L}{2}+q\right)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \mu L \dot{q} \; ; \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \mu L \ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \mu g \left(\frac{L}{2}+q\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{q} = \frac{g}{L}\left(\frac{L}{2}+q\right)$$

Neue Variable: $Q = \frac{L}{2} + q$

$$\Rightarrow \ddot{Q} - \frac{g}{L} Q = 0$$

$$\Rightarrow Q = A e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + B e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}$$

$$\dot{Q}(0) = \sqrt{\frac{g}{L}}(A - B) = 0 \Rightarrow B = A$$

$$Q(0) = 2A = \frac{L}{2} \qquad A = \frac{L}{4}$$

$$\Rightarrow q = -\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right) \quad \text{für } 0 < q < \frac{L}{2}$$

$$\left(0 < t < \sqrt{\frac{L}{g}}\, \operatorname{acosh}(2)\right)$$

Aufgabe 3:

$$\vec{A} = \frac{\vec{\mu}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

antisymmetrisch — symmetrisch in $i \leftrightarrow k$

(a) $$\nabla\cdot\vec{A} = \partial_i A^i = \partial_i \frac{\varepsilon^{ijk}\mu^j x^k}{|\vec{x}|^3} = \frac{\varepsilon^{ijk}\mu^j}{|\vec{x}|^3}\,\delta^{ik} - 3\,\frac{\varepsilon^{ijk}\mu^j x^k x^i}{|\vec{x}|^5} = 0$$

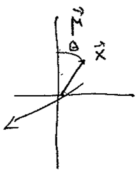
(b) $$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \sum_i \vec{e}_i\,\varepsilon^{ijk}\,\partial_j\,\frac{\varepsilon^{klm}\mu^l x^m}{|\vec{x}|^3}$$

$$= \sum_i \vec{e}_i\,\underbrace{\varepsilon^{kij}\varepsilon^{klm}}_{\delta^{il}\delta^{jm}-\delta^{im}\delta^{jl}}\cdot\mu^l\cdot\left(\frac{\delta^{mj}}{|\vec{x}|^3} - 3\,\frac{x^m x^j}{|\vec{x}|^5}\right)$$

$$\delta^{jm}\left(\frac{\delta^{mj}}{|\vec{x}|^3} - 3\,\frac{x^m x^j}{|\vec{x}|^5}\right) = \frac{3}{|\vec{x}|^3} - 3\,\frac{|\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^5} = 0$$

$$= -\sum_i\left(\frac{\vec{e}_i\mu^i}{|\vec{x}|^3} - 3\,\frac{\vec{e}_i x^i\cdot\vec{\mu}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^5}\right) = \frac{3\vec{x}\,(\vec{\mu}\cdot\vec{x})}{|\vec{x}|^5} - \frac{\vec{\mu}}{|\vec{x}|^3}$$

(c) $$\text{Fluss} = \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{B} = R^2\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\cdot\left(\frac{3\vec{x}(\vec{\mu}\cdot\vec{x}) - \vec{\mu}|\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^5}\right)\Bigg|_{|\vec{x}|=R}$$



Wähle z-Achse in Richtung von $\vec{\mu}$! $\Rightarrow$ $\vec{\mu}\cdot\vec{x} = \mu R\cos\theta$

$$= \frac{R^2}{R^3}\cdot 2\pi\cdot\int_0^\pi d\theta\sin\theta\,(3\cos\theta - \cos\theta)$$

$$= \frac{2\pi}{R}\Big[-\cos^2\theta\Big]_0^\pi = 0 \qquad \square.$$

Aufgabe 4:

$$A = \begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix}$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi} \iff A^{0'} = A^0 - \frac{\partial\chi}{\partial x^0} = A^0 - \partial_0\chi = A^0 - \partial^0\chi$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \iff A'^i = A^i + \frac{\partial\chi}{\partial x^i} = A^i + \partial_i\chi = A^i - \partial^i\chi$$

$$\Rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\chi$$

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu$$

$$= \partial^\mu A^\nu - \cancel{\partial^\mu\partial^\nu\chi} - \partial^\nu A^\mu + \cancel{\partial^\nu\partial^\mu\chi}$$

$$= F^{\mu\nu}$$

$\square$.

— · —

9.2 Einblick in weitere Themen

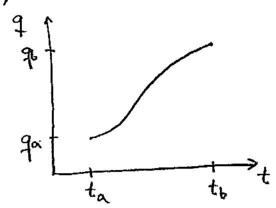
Viele der Begriffe dieser Vorlesung können weit jenseits des bisherigen Anwendungsbereichs verallgemeinert werden. Zum Beispiel:

* Das Prinzip der kleinsten Wirkung

In der klassischen Mechanik: $S = \int_{t_a}^{t_b} dt\, L(q,\dot{q},t)$

$\delta S = 0$

mit $q(t_a) = q_a$
und $q(t_b) = q_b$.

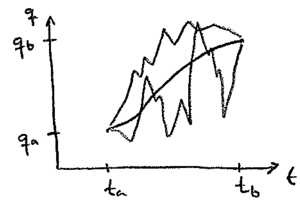


In der Quantenmechanik (QM II): $S = \int_{t_a}^{t_b} dt\, L(q,\dot{q},t)$

Alle Pfade sind erlaubt, aber sie haben unterschiedliche „Amplituden", über den summiert wird.

$$\Rightarrow \int_{q(t_a)=q_a}^{q(t_b)=q_b} \mathcal{D}q(t) \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right) \quad ; \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

h = Plancksche Konstante



* Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

In der klassischen Mechanik:

$\{x,x\} = \{p,p\} = 0$ ← Poisson-Klammer

$\{x,p\} = 1$

$\dot{x}(t) = \{x,H\}$

$\dot{p}(t) = \{p,H\}$

In der Quantenmechanik (Theorie II):

$$\left.\begin{array}{l} x \to \hat{x} \\ p \to \hat{p} \end{array}\right\} \text{ „Operatoren"}$$

$\{\cdot,\cdot\} \to \frac{1}{i\hbar}[\cdot,\cdot]$ ← „Kommutator"; $[\hat{A},\hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

$\Rightarrow [\hat{x},\hat{x}] = [\hat{p},\hat{p}] = 0$

$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$

$$i\hbar \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = [\hat{x},\hat{H}]$$

$$i\hbar \frac{d\hat{p}(t)}{dt} = [\hat{p},\hat{H}]$$

* Eichinvarianz

In der Elektrodynamik: A^μ ist nicht physikalisch; $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$ enthält dieselbe Information; Physik liegt bei eichinvarianten Grössen wie

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \, .$$

In der Elementarteilchenphysik: $A^\mu \to A^{a\mu}$, $a = 1, \ldots, 8$

„Gluon"

Eichtransformation: $A'^{a\mu} = A^{a\mu} - \partial^\mu \chi^a - g f^{abc} A^{b\mu} \chi^c$

„Kopplungskonstante"

„Strukturkonstanten"

Feldstärketensor:

$$F^{a\mu\nu} = \partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \, .$$

* Relativitätsprinzip

In der speziellen Relativitätstheorie: Σ, Σ' sind Inertialsysteme;
$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, dx^\nu$, $\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$;
$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$;
$\eta_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$.

In der allgemeinen Relativitätstheorie: Schwerkraft $\leftrightarrow$ Beschleunigung, d.h. nichtinertiale Systeme werden auch betrachtet; die Koordinatentransformation $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ ist völlig allgemein; $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$; die Naturgesetze und ds^2 müssen auch im allgemeinen Koordinatentransformationen invariant bleiben; die Form von $g_{\mu\nu}$ bleibt aber <u>nicht</u> invariant.

— o —