8.3 Relativistische Mechanik

Der Formalismus der 4-Vektoren usw. (Kapitel 8.2) erlaubt uns, die Grundgesetze der klassischen Mechanik (sowie im Kapitel 8.4 die der klassischen Elektrodynamik) so zu verallgemeinern, dass sie auch im relativistischen Limes ($|\vec{v}| \approx c$) gültig sind.

Der Ausgangspunkt ist Relativitätsprinzip: die Gesetze der Physik müssen (in Form) in allen inertialen Bezugssystemen die selben sein.

Dieses gilt, wenn die Grundgesetze als Gleichungen zwischen 4-Skalaren, 4-Vektoren usw. formuliert werden. *

Ein eleganter Weg für eine solche Umformulierung der Mechanik geht vom Hamiltonschen Prinzip (Kapitel 2.1; Seite 25) aus.

* Wirkung S sei extremal.
* S ist eine reelle Nummer $\rightarrow$ 4-Skalar.
* Nichtrelativistisch: $S = \int_{t_a}^{t_b} dt\, L \;,\quad L = \frac{m}{2}\vec{v}^2$.
* Homogenität der Raumzeit $\Rightarrow$ S unabhängig von $\vec{x}, t$.
* Invariant (Seite 104): $d\tau = \sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}\, dt$

$$\Rightarrow \quad \text{Ansatz} \quad S = -\alpha \int_a^b d\tau$$

noch zu bestimmende Konstante

Integral entlang einer „Weltlinie" vom Ereignis a bis Ereignis b.

* Bestimmung von α:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt\, L \quad \text{mit} \quad L = -\alpha\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

$$= -\alpha\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{2c^2} + O\left(\frac{\vec{v}^4}{c^4}\right)\right)$$

Konstante spielt keine Rolle

Muss mit nichtrelativistischem Limes übereinstimmen

$$\Rightarrow \quad m\frac{\vec{v}^2}{2} = \alpha\frac{\vec{v}^2}{2c^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = mc^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} \;;\quad \vec{v} = \dot{\vec{x}}(t)}$$

---

* Zum Beispiel: $A^{\mu'} = B^{\mu'} \Leftrightarrow A^{\mu'} - B^{\mu'} = 0 \Leftrightarrow \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(A^{\nu} - B^{\nu}) = 0 \Leftrightarrow A^{\nu} - B^{\nu} = 0 \Leftrightarrow A^{\nu} = B^{\nu}$

Λ^{-1} existiert! (vgl. Seite 106)

Kanonischer Impuls (Seite 28)

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial}{\partial v^i}\left[-mc^2\sqrt{1-\frac{\sum_j v^j v^j}{c^2}}\right]$$

$$= -mc^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\cdot\left(\frac{-2v^i}{c^2}\right) = \frac{mv^i}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

Im nichtrelativistischen Limes: $p^i = mv^i\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)\right)$ ok!

Energie (Seite 27)

$$E = \sum_i p^i \dot{x}^i - L$$

$$= \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\left(\vec{v}^2 + c^2 - \vec{v}^2\right)$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

Im nichtrelativistischen Limes: $E = mc^2\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \underbrace{mc^2}_{\text{„Ruheenergie"}} + \underbrace{\frac{m\vec{v}^2}{2}}_{\text{„kinetische Energie"}} + \mathcal{O}\left(m\frac{\vec{v}^4}{c^4}\right)$$

4-Impuls

Um aus p^i und E einen 4-Vektor zu bauen, benutzen wir die 4-Geschwindigkeit u (Seite 104):

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v}\end{pmatrix}$$

Definition:

$$P := \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\cdot m\cdot\begin{pmatrix} c \\ \vec{v}\end{pmatrix} = mu$$

Die Ruhemasse m ist 4-Skalar, deshalb ist P 4-Vektor.

Eigenschaften des 4-Impulses

(i) $$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 u^2 \overset{\text{Seite 104}}{=} m^2 c^2$$

$$\Rightarrow E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2$$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} = mc^2\left(1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{(\vec{p}^2)^2}{m^3c^2} + \dots$$

(ii) Wie erhält man aus E und $\vec{p}$ die Geschwindigkeit?

$$P = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = mu = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}}{p^0} = \frac{\vec{p}c}{E}.$$

Es gilt aber auch:

$$\nabla_{\vec{p}} E = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial p^i}\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} = \sum_i \vec{e}_i \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{2p^ic^2}{\sqrt{}} = \frac{\vec{p}c^2}{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \nabla_{\vec{p}} E \quad !$$

(iii) Energie und Impuls bleiben erhalten $\Leftrightarrow$ 4-Impuls P bleibt erhalten.

Beispiele

(i) Am LHC werden Protonen mit Restmasse $m = 938\,\frac{\text{MeV}}{c^2}$ $= 1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg}$

10^6 eV = die einer Elementarladung durch Spannung von 1 Volt gegebene Energie

zu einer Energie von 7 TeV (10^{12}) beschleunigt. Was ist ihre Geschwindigkeit?

$$\Rightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \frac{mc^2}{E} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{938\cdot 10^6}{7\cdot 10^{12}}\right)^2$$

$$= 1 - 8{,}98 \times 10^{-9} = 0{,}999999991\dots$$

(ii) Ein instabiles Teilchen mit Masse m_a zerfällt in zwei Teilchen mit Massen m_b und m_c. Was ist die Energie von b im Ruhesystem von a?

$$P_a = \left(\frac{E_a}{c}, \vec{0}\right) = \left(m_a c, \vec{0}\right)$$

$$P_b = \left(\frac{E_b}{c}, \vec{p}_b\right) \qquad P_c = \left(\frac{E_c}{c}, \vec{p}_c\right)$$

Energieimpulserhaltung:

$$P_a = P_b + P_c \quad \overset{\text{Raumteil}}{\Rightarrow} \quad \vec{p}_c = -\vec{p}_b =: -\vec{p}$$

$$\overset{\text{Zeitteil}}{\Rightarrow} \quad m_a c = \sqrt{m_b^2 c^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_c^2 c^2 + \vec{p}^2}$$

Man könnte von hier aus $\vec{p}^2$ bestimmen und danach in $E_b = \sqrt{m_b^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$ einsetzen, aber es geht auch einfacher!

Direkt:

$$E_b = \frac{1}{m_a} \cdot m_a c \cdot \frac{E_b}{c}$$

$$= \frac{1}{m_a} P_a \cdot P_b$$

$$= \frac{1}{2m_a} \left(-(P_a - P_b)^2 + P_a^2 + P_b^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2m_a} \left(-P_c^2 + P_a^2 + P_b^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2m_a} \left(-m_c^2 + m_a^2 + m_b^2 \right) c^2 .$$

Gleicherweise: $$E_c = \frac{1}{2m_a} \left(-m_b^2 + m_a^2 + m_c^2 \right) c^2 .$$

Nachprüfung: $$E_b + E_c = \frac{1}{2m_a} \cdot 2m_a^2 c^2 = m_a c^2$$ ok!

— o —