8.2 Vierer-Skalare, -Vektoren und -Tensoren

Um die mathematischen Eigenschaften der speziellen Relativitätstheorie auszudrücken und die vollen physikalischen Konsequenzen davon ziehen zu können, wird eine besondere Notation eingeführt.

Notationen

* $dx := \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$ mit $dx^0 := c\,dt$ ist ein 4-Vektor.

  Die Komponenten: dx^μ, $\mu \in \{0,1,2,3\}$.
  Griechische Indizes laufen von 0 bis 3.
  Lateinische Indizes laufen von 1 bis 3.

* Lorentz-Transformation:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}$$

$dx' = \Lambda dx$

In Komponenten: $dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, dx^\nu$, mit Summenkonvention (jetzt für Indizes die einmal unten und einmal oben auftauchen).

* Im Allgemeinen: $A = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vdots \\ A^3 \end{pmatrix}$ ist ein 4-Vektor, wenn sich die Komponenten A^μ als $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ transformieren.

Wie konstruiert man ein 4-Skalar, d.h. einen Invarianten unter Λ?

Drehungen (Seite 9): $\vec{x}$ Vektor $\Rightarrow$ $\vec{x}\cdot\vec{x}$ Skalar.

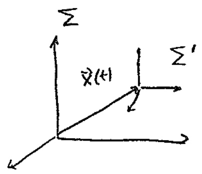
Jetzt soll aber $ds^2 = (dx^0)^2 - d\vec{x}\cdot d\vec{x}$ invariant bleiben.

* $A_0 := A^0$
  $A_i := -A^i$, $i = 1,2,3$
  $A^2 := A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - \vec{A}\cdot\vec{A}$ „Viererskalarprodukt" (nicht positiv definit)

D.h., ds^2 ist 4-Skalar, sowie im Allgemeinen 4-Skalarprodukte der Form A^2.

Beispiele

* Eigenzeit eines Teilchens mit Bahnkurve $\vec{x}(t)$.



Teilchen trägt Uhr mit sich.
Ereignisse: ① =: a, ② =: b

Im System Σ: Geschwindigkeit sei konstant zwischen a und b.
Zeitinterval: dt
Abstand: $d\vec{x} = \dot{\vec{x}}(t)\,dt = \vec{v}(t)\,dt$.

Im System Σ': Zeitinterval: $d\tau$; τ = „Eigenzeit"
Abstand: $d\vec{x}' = 0$.

ds^2 ist invariant $\Rightarrow$ $ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}}$$

$\Rightarrow$ Eigenzeitintervall $d\tau := \sqrt{\frac{ds^2}{c^2}}$ ist 4-Skalar. (Bemerkung: $d\tau$ ist wie dt' auf Seite 102.)

* 4-Geschwindigkeit

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$= \frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} c \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

ist 4-Vektor, weil dx^μ 4-Vektor und $d\tau$ 4-Skalar ist.

* $u^2 = u^\mu u_\mu = \frac{1}{\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)}\left(c^2 - \vec{v}^2\right) = c^2$ ist 4-Skalar.

— ∘ —

Betrachten wir den 4-Skalar $(A+B)^2$:

$$(A+B)^2 = (A^\mu + B^\mu)(A_\mu + B_\mu) = A^2 + B^2 + A^\mu B_\mu + B^\mu A_\mu$$

$$= A^2 + B^2 + A^0B^0 - \vec{A}\cdot\vec{B} + B^0A^0 - \vec{B}\cdot\vec{A} = A^2 + B^2 + 2A\cdot B\,,$$ mit $A\cdot B := A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$

invariant

$\Rightarrow$ $A\cdot B$ ist invariant $\forall\, A, B$!

Unter Lorentz-Transformation:

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu} \quad , \quad B'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} B^{\nu}$$; wenn die Indizes oben sind, sprechen wir von einem <u>kontravarianten</u> 4-Vektor.

Wie transformieren sich die <u>kovarianten</u> Komponenten A'_{μ}, B'_{μ} ?

Sei

$$A'_{\mu} := A_{\alpha} M^{\alpha}{}_{\mu}$$

$$A' \cdot B' = A'_{\mu} B'^{\mu} = A_{\alpha} M^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\beta} B^{\beta} \overset{\text{Invarianz}}{=} A \cdot B = A_{\alpha} B^{\alpha} \qquad \forall A, B$$

$$\Rightarrow M^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} := \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} = \text{Kronecker-Delta}$$

In Matrixform: $M \Lambda = \mathbb{1} \Rightarrow M = \Lambda^{-1}$!

D.h., kovariante Vektoren transformieren sich als

$$A'_{\mu} = A_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \quad , \quad B'_{\mu} = B_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} .$$

<u>4-Tensoren</u> (vgl. Seite 8)

* Falls $T^{\mu\nu}$ wie $A^{\mu} B^{\nu}$ transformiert, handelt es sich um einen <u>kontravarianten Tensor 2. Stufe</u>

* Kovariante Tensoren werden gebaut wie kovariante Vektoren, d.h. mit Minus-Zeichen bei räumlichen Indizen:

$$T_{ij} = -T^{i}{}_{j} = -T_{i}{}^{j} = T^{ij}$$

$$T_{0i} = T^{0}{}_{i} = -T_{0}{}^{i} = -T^{0i}$$

Sie transformieren wie $A_{\mu} B_{\nu}$.

* Ein Tensor könnte symmetrisch $(T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu})$ oder antisymmetrisch sein $(T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu})$. Diese Eigenschaft ist invariant:

$$T'^{\nu\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\beta} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} T^{\beta\alpha} = \pm \Lambda^{\nu}{}_{\beta} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} T^{\alpha\beta} = \pm T'^{\mu\nu} .$$

* <u>Kontraktion</u>: $T^{\mu}{}_{\mu}$ ist 4-Skalar.

* ein <u>invarianter Tensor</u>:

$$\delta'^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} (\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\nu} \delta^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\nu} = (\Lambda \Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} .$$

Metrischer Tensor

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

* Numerisch: $\eta_{\mu\nu} \neq \delta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu} \neq \delta^{\mu\nu}$!
* Es gilt: $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$, $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$, $A^2 = A^\mu \eta_{\mu\nu} A^\nu$.
* Betrachten wir jetzt eine Lorentz-Transformation:

$$A'_\mu \overset{\text{Seite 105}}{=} A_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu$$

$$\underset{\text{hier}}{\overset{!}{=}} \eta_{\mu\nu} A'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta A^\beta = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \eta^{\beta\alpha} A_\alpha$$

D.h.,

$$(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \eta^{\beta\alpha} = \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\nu\mu}$$

Symmetrisch

Matrixschreibweise:

$$\boxed{\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta}$$

Dies kann auch als definierende Eigenschaft einer Lorentz-Transformation betrachtet werden.

Vgl. mit Drehmatrix (Seite 9): $R^T R = \mathbb{1} \Rightarrow R^{-1} = R^T$.

D.h.,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad \text{ist Lorentz-Transformation.}$$

(<u>Beweis</u>: $\eta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}^T \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} = \Lambda^{-1}$.)