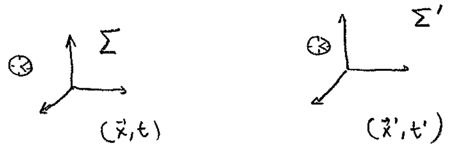
8. Spezielle Relativitätstheorie

8.1 Lorentz-Transformation

Wie Galilei-Transformation aber ohne Translation: nur Boosts ($\vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t$) und Drehungen ($\vec{x}' = R\vec{x}$), mit der Eigenschaft $(\vec{x},t) = (\vec{0},0) \Leftrightarrow (\vec{x}',t') = (\vec{0},0)$.
Nur Inertialsysteme werden betrachtet.

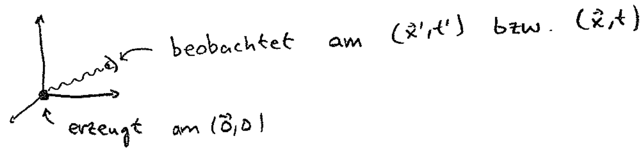


„Raum-Zeit"

„Ereignis" := ein physikalischer Prozess am $(\vec{x},t)$ bzw. $(\vec{x}',t')$.

Boost laut Galilei: $\begin{cases} t' = t \\ \vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}' = \dfrac{d\vec{x}'}{dt'} = \dfrac{d(\vec{x}-\vec{u}t)}{dt} = \vec{v} - \vec{u}$.

Dieses würde auch für Licht gelten:



$\Rightarrow \quad c' \neq c$.

Ein solches Ergebnis steht aber im Widerspruch zu:

(i) Maxwell-Gleichungen: alle elektromagnetischen Wellen, unabhängig vom Inertialsystem, haben dieselbe Geschwindigkeit c.

(ii) Experimente (Michelson-Morley 1887 usw)

Die Regeln der Galilei-Transformation können also nicht richtig sein!

Zwei Ereignisse, z.B. Erzeugung und Beobachtung

Einstein 1879-1955

Neues Prinzip: für Licht gilt $c = \left|\dfrac{d\vec{x}'}{dt'}\right| = \left|\dfrac{d\vec{x}}{dt}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} |d\vec{x}'| = c\,dt' \\ |d\vec{x}| = c\,dt \end{cases}$

$d\vec{x}' := \vec{x}_b' - \vec{x}_a'$, $dt' := t_b' - t_a'$

$\Rightarrow$ „Abstand" $ds^2 := c^2dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2dt'^2 - d\vec{x}'^2$ sei invariant. Lineare Transformationen

$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} c\,dt \\ d\vec{x} \end{pmatrix},$$

wobei Λ eine 4×4-Matrix ist, die diese Bedingung erfüllen, heissen Lorentz-Transformationen.

1853-1928

Eine Drehung, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, mit $R^T R = \mathbb{1}_{3\times 3}$, ist eine Lorentz-Transformation:

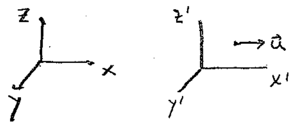
$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,dt \\ R\,d\vec{x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^T R^T R\, d\vec{x} = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 . \qquad \square$$

Die Boosts müssen aber verallgemeinert werden.

Boost in Richtung $\vec{u}$ = Drehung von $\vec{u}$ zum $|\vec{u}|\vec{e}_1$,
gefolgt von Boost in $\vec{e}_1$-Richtung,
gefolgt von Rückdrehung.

D.h., es ist genug, Boost in x-Richtung zu betrachten:

$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$



in senkrechten Richtungen passiert nichts

die parallelen und senkrechten Richtungen können nicht miteinander mischen.

$A, B, C, D \in \mathbb{R}$ sind Funktionen der Boost-Geschwindigkeit $u := |\vec{u}|$.

Bestimmung von A, B, C, D

(i)
$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,c\,dt + B\,dx \\ C\,c\,dt + D\,dx \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= (A\,c\,dt + B\,dx)^2 - (C\,c\,dt + D\,dx)^2 \\ &= (A^2 - C^2)\,c^2dt^2 + (B^2 - D^2)\,dx^2 + 2(AB - CD)\,c\,dt\,dx \\ &\overset{!}{=} c^2dt^2 - dx^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^2 - C^2 = 1 \\ B^2 - D^2 = -1 \\ AB - CD = 0 \end{cases}$$

Sei $A =: \gamma$; $\gamma^2 = 1 + C^2 \geq 1 \Rightarrow \gamma \neq 0$

$$B = \frac{CD}{\gamma}$$

$$B^2 - D^2 = \left(\frac{C^2}{\gamma^2} - 1\right) D^2 = \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} - 1\right) D^2 = -\frac{D^2}{\gamma^2} = -1$$

$$\Rightarrow D = \pm\gamma$$

(ii) Für $u \to 0$ muss $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gelten.

$\gamma^2 \geq 1$ impliziert also $\gamma \geq 1$ (und nicht $\gamma \leq -1$).

D ist ausserdem $+\gamma$ (und nicht $-\gamma$).

Weiterhin gilt

$$B = \frac{CD}{\gamma} = C = \pm\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

(iii) Für $dx = 0$ (zwei Ereignisse am Ursprung von Σ)

muss $dx' = -u\,dt'$ gelten (Σ bewegt sich mit Geschwindigkeit $-\vec{u}$ bzgl. Σ')

$$dx = 0 \Rightarrow \begin{cases} c\,dt' = A\,c\,dt \\ dx' = C\,c\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c\,dt' = A\,c\,dt \\ -u\,dt' = C\,c\,dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{A} = -\frac{u}{c} =: -\beta < 0$$

(iv) Aus (ii): $C = -\sqrt{\gamma^2 - 1}$

Aus (iii): $C = -\beta\gamma$

$$\Rightarrow \beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1 \Rightarrow 1 = \gamma^2(1-\beta^2) \Rightarrow \gamma = +\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Insgesamt: $A = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $C = -\beta\gamma$; $B = C = -\beta\gamma$; $D = \gamma$; $\beta = \frac{u}{c}$

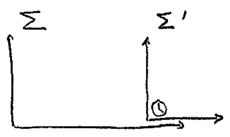
$$\Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Drehmatrix $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \det R = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Boostmatrix $B = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = 1$.

Konsequenzen

Zeitdilatation



Eine Uhr ruhe am Ursprung von Σ':

D.h., $dx' = 0$. Was ist die Beziehung von dt und dt'?

$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Für $dx' = 0$ folgt $c\,dt = \gamma\, c\,dt'$

$\Rightarrow \quad dt = \gamma\, dt' \; > \; dt'$

D.h., die bewegte Uhr geht von Σ aus gesehen langsamer.

Längenkontraktion

Ein Stab ruhe in Σ', mit Ruhelänge $L' =: dx'$.
Messung der Stablänge bzgl. Σ, mit $dt = 0$:

$$dx' = \gamma\, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dx'}{\gamma} = \frac{L'}{\gamma} < L' .$$

D.h., der bewegte Stab scheint bzgl. Σ verkürzt.

— o —

* Abstände mit $ds^2 = 0$ werden „lichtartig" genannt.
* Abstände mit $ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^2 > 0$ sind „zeitartig".
  In diesem Fall ist $|d\vec{x}| < c\,dt$, d.h. man kann die Ereignisse mit einer Geschwindigkeit $\frac{|d\vec{x}|}{dt} < c$ verbinden.
* Abstände mit $ds^2 < 0$ sind „raumartig";
  entsprechende Ereignisse können nicht kausal einander beeinflussen.