7.4 Strahlung

Die Wellengleichungen in der Lorenz-Eichung (Seite 85):

$$\begin{cases} \Box\phi = 4\pi\rho \\ \Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \\ \frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A} = 0 \\ \Box\chi = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \\ \phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi} \end{cases} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

= allgemeine Lösung der homogenen ($\rho = \vec{J} = 0$) Gleichung (Kap. 7.2)

+ spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die letztere beschreibt Strahlung wegen $\rho, \vec{J} \neq 0$, und kann mit Hilfe von Greenschen Funktionen (Kap. 5.2) gefunden werden.

Wir betrachten zuerst eine reelle Funktion G, mit

$$\Box_x G(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta(t-t'). \qquad \text{(vgl. Seite 63)}.$$

Fourier-Darstellung für die Zeitkoordinate: $(\vec{r} := \vec{x}-\vec{x}',\ \tau := t-t')$

$$\begin{cases} G(\vec{r},\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{G}(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega\tau} \\ \tilde{G}(\vec{r},\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, G(\vec{r},\tau)\, e^{i\omega\tau} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[-\frac{\omega^2}{c^2} - \nabla^2\right] \tilde{G}(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega\tau} = 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r})\,\delta(\tau) \quad \Big|\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega'\tau}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\omega'^2}{c^2} + \nabla^2\right] \tilde{G}(\vec{r},\omega') = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r})$$

Für $\omega' \to 0$ genau wie auf Seite 63! Wir wissen also auf jeden Fall, dass

$$\lim_{\omega'\to 0} \tilde{G}(\vec{r},\omega') = \frac{1}{r}, \qquad r := |\vec{r}| \qquad (*)$$

gelten muß.

Um eine Lösung zu finden nehmen wir an, dass $\tilde{G}(\vec{r},\omega')$ aus Symmetriegründen nur von r abhängig ist. Für $r \neq 0$, durch Benutzung von ∇^2 in Kugelkoordinaten, bekommen wir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\omega'^2}{c^2}\right)\tilde{G} = 0$$

<u>Behauptung</u>: Die allgemeine Lösung lautet $\tilde{G} = \dfrac{Ae^{i\frac{\omega'}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega'}{c}r}}{r}$.

<u>Beweis</u>:

$$\frac{\partial}{\partial r}\tilde{G} = -\frac{Ae^{i\frac{\omega'}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega'}{c}r}}{r^2} + i\frac{\omega'}{c}\cdot\frac{Ae^{i\frac{\omega'}{c}r} - Be^{-i\frac{\omega'}{c}r}}{r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\tilde{G} = 2\,\frac{Ae^{i\frac{\omega'}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega'}{c}r}}{r^3} - 2i\frac{\omega'}{c}\cdot\frac{Ae^{i\frac{\omega'}{c}r} - Be^{-i\frac{\omega'}{c}r}}{r^2} - \frac{\omega'^2}{c^2}\,\frac{Ae^{i\frac{\omega'}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega'}{c}r}}{r}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\tilde{G} = -\frac{\omega'^2}{c^2}\tilde{G} \qquad \square .$$

Ausserdem müssen wir das richtige Verhalten bei $r \to 0$ haben:

$$\lim_{r\to 0}\tilde{G} = \lim_{r\to 0}\frac{A+B}{r} + \text{Konstante}.$$

Die Kombination $\frac{A+B}{r}$ ist aber auch $\lim_{\omega'\to 0}\tilde{G}$; Gl. (*) auf Seite 95 verlangt also

$$A+B = 1.$$

Aber es gibt keine weiteren Bedingungen.

<u>Zwischenbilanz</u>: Die Greensche Funktion ist <u>nicht</u> eindeutig; die Konstanten A und B können ohne weitere Bedingungen <u>nicht</u> völlig fixiert werden.
(vgl. Seite 64: im statischen Limes im $\mathbb{R}^3$ <u>ist</u> G eindeutig.)

<u>Rücktransformation</u>:

$$G(\vec{r},\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\,\frac{Ae^{i\frac{\omega'}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega'}{c}r}}{r}\,e^{-i\omega'\tau}\Bigg|_{A+B=1}$$

$$= \frac{A\,\delta\!\left(\frac{r}{c}-\tau\right) + B\,\delta\!\left(\frac{r}{c}+\tau\right)}{r}\Bigg|_{A+B=1}$$

Physikalische Interpretation:

* Der Fall $B=0$, d.h. $G(\vec{r},\tau) = G_{ret}(\vec{r},\tau) := \frac{\delta(\frac{r}{c}-\tau)}{r}$ ist nichtverschwindend nur bei $\tau > 0$, und wird eine „retardierde Greensche Funktion" genannt. Die Information erreicht den Abstand $|\vec{x}-\vec{x}'| = r$ am Zeitpunkt $t-t' = \frac{r}{c}$, d.h. propagiert mit der Lichtgeschwindigkeit c in Richtung von $\vec{r}$.

* Der Fall $A=0$, d.h. $G(\vec{r},\tau) = G_{adv}(\vec{r},t) := \frac{\delta(\frac{r}{c}+\tau)}{r}$, ist nichtverschwindend nur bei $\tau < 0$: Information propagiert nach innen, zum „Abfluss" („avancierte Greensche Funktion").

Für Strahlung ist der erste Fall relevant.

— ∘ —

Kehren wir zurück zu den Maxwell-Gleichungen (Seite 95), insbesondere

$$\Box \vec{A}(\vec{x},t) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x},t) .$$

Schreibe: $\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}' \int dt' \, G_{ret}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') \, \vec{J}(\vec{x}',t')$.

Dies ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\Box \vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}' \int dt' \, \Box_x G_{ret} \, \vec{J}(\vec{x}',t')$$

$$= \frac{4\pi}{c}\int d^3\vec{x}' \int dt' \, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \, \delta(t-t') \, \vec{J}(\vec{x}',t') = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{x},t) .$$

Die explizite Form des Vektorpotentials:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}' \int dt' \, \frac{\delta\left(\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c} - t + t'\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \, \vec{J}(\vec{x}',t')$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}' \, \frac{\vec{J}\left(\vec{x}', \, t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} .$$

Falls $\vec{J}(\vec{x}',t') = 0$ für $t' < t_0$ ist auch $\vec{A}(\vec{x},t) = 0$ für $t < t_0$.

Multipolentwicklung

Sei $\vec{J}(\vec{x}', t') := \mathrm{Re}\left[\vec{J}(\vec{x}')\, e^{-i\omega t'}\right]$; $k := \frac{\omega}{c}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[e^{-i\omega t}\, \frac{1}{c} \int_V d^3\vec{x}'\, \vec{J}(\vec{x}')\, \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]$$

Für $|\vec{x}| \gg \max(|\vec{x}'|)$ ist $|\vec{x}-\vec{x}'| \approx |\vec{x}| =: r$ (vgl. Seite 67)

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x},t) \approx \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-i\omega t + ikr}}{cr} \int_V d^3\vec{x}'\, \vec{J}(\vec{x}')\right]$$

Hier benutzen wir ein Paar Tricks:

Gauß + $\vec{J}|_{\partial V} = 0$

$$* \quad 0 = \sum_{i=1}^{3} \int_V d^3\vec{x}'\, \frac{\partial}{\partial x'^i}\left(x'^k J^i\right) = \int_V d^3\vec{x}' \left(\sum_{i=1}^{3} \delta^{ik} J^i + x'^k\, \nabla\cdot\vec{J}\right)$$

$$\Rightarrow \int_V d^3\vec{x}'\, \vec{J} = -\int_V d^3\vec{x}'\, \vec{x}'\, (\nabla\cdot\vec{J})$$

$*$ Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0$ mit $\rho(\vec{x}',t') = \mathrm{Re}\left[\rho(\vec{x}')e^{-i\omega t'}\right]$;
$\vec{J}(\vec{x}',t') = \mathrm{Re}\left[\vec{J}(\vec{x}')e^{-i\omega t'}\right]$;

$$\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t'} = \mathrm{Re}\left[i\omega\, \rho(\vec{x}')\, e^{-i\omega t'}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x},t) \approx \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-i\omega t + ikr}}{cr} \cdot (-i\omega) \cdot \underbrace{\int d^3\vec{x}'\, \vec{x}'\, \rho(\vec{x}')}\right]$$

Seite 67: das elektrische Dipolmoment $\vec{P}$!

Das Ergebnis ist also das Vektorpotential der Dipolstrahlung*:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x},t) = k\vec{P}\, \frac{\sin(-\omega t + kr)}{r} \quad ; \quad k := \frac{\omega}{c}}$$

auslaufende Kugelwelle.

Die entsprechenden physikalischen Felder:

$$* \quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \nabla\times\left(\vec{P} f(r)\right) = \sum_i \vec{e}_i\, \varepsilon^{ijk}\, \partial_j \left(P^k f(r)\right) = \sum_i \vec{e}_i\, \varepsilon^{ijk}\, P^k\, \partial_j f(r)$$

$$= (\nabla f)\times\vec{P} = k\, \vec{e}_r\times\vec{P}\, \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sin(-\omega t + kr)}{r} = k^2\, \vec{e}_r\times\vec{P}\, \frac{\cos(-\omega t + kr)}{r} \left(1 + O\left(\tfrac{1}{kr}\right)\right).$$

$*$ $\vec{E}$ durch M II, d.h. $\frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \nabla\times\vec{B}$ (im Bereich mit $\vec{J} = 0$)

$\Rightarrow$ Aufgabe 14.1.

---

* keine Strahlung aus „Monopol" bzw. Gesamtladung!