7.3 Energiedichte und -strom des Feldes

Wir haben im Kapitel 5.1 (Seite 62) festgestellt, dass ein statisches elektrisches Feld eine Energiedichte besitzt,

$$e(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2(\vec{x}) .$$

Die Aufgabe ist jetzt, diesen Ausdruck für den dynamischen Fall zu verallgemeinern, und dann insbesondere für eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum anzuwenden.

$$\begin{array}{lrl} -\mathrm{M\,II}: & -\nabla\times\vec{B} + \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} & \Big|\cdot\vec{E} \\ \mathrm{M\,III}: & \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 & \Big|\cdot\vec{B} \end{array}$$

$$\underbrace{\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})} + \frac{1}{c}\left(\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \vec{B}\cdot\dot{\vec{B}}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}\cdot\vec{E} \qquad \Big|\cdot\frac{c}{4\pi}$$

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) &= \varepsilon^{ijk}\partial_i(E^jB^k) = \varepsilon^{ijk}(\partial_iE^j\,B^k + E^j\partial_iB^k) \\ &= B^k\varepsilon^{ijk}\partial_iE^j + E^j\varepsilon^{ijk}\partial_iB^k \\ &= B^k\varepsilon^{kij}\partial_iE^j - E^j\varepsilon^{jik}\partial_iB^k = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4\pi}\underbrace{\left(\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \vec{B}\cdot\dot{\vec{B}}\right)}_{E^i\dot{E}^i + B^i\dot{B}^i = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{B})} + \frac{c}{4\pi}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = -\vec{J}\cdot\vec{E}$$

Wir definieren

$$e_{em} := \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$$

$$\vec{S} := \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} \qquad \text{„Poynting-Vektor"} \quad (1852-1914)$$

Die Gleichung bekommt die Form

$$\frac{\partial e_{em}}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{S} = -\vec{J}\cdot\vec{E}, \qquad \text{„Poynting-Theorem"}$$

welche der Form der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0$ (Seite 56) sehr ähnelt. Die Grösse e_{em} wäre dann die <u>Energiedichte</u>, während $\vec{S}$ die <u>Energiestromdichte</u> beschreiben würde. Um diese Interpretation zu akzeptieren, müssen wir allerdings die Bedeutung des Terms auf der rechten Seite verstehen.

Weil der Term auf der rechten Seite die Ladungsstromdichte enthält, liegt es nahe, die Energiedichte der geladenen Teilchen in Betracht zu ziehen.

Sei (wie auf Seite 77) $\quad \vec{j} := \sum_a q_a \vec{v}_a \, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a)$.

Dann gilt:

$$\int_V d^3\vec{x} \; \vec{j} \cdot \vec{E} = \int_V d^3\vec{x} \; \sum_a q_a \, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a) \, \vec{v}_a \cdot \vec{E}$$

$$= \sum_{\vec{x}_a \in V} q_a \, \vec{v}_a \cdot \vec{E}(\vec{x}_a).$$

Auf der anderen Seite lässt sich die Änderung der kinetischen Energie der Punktladungen („Materie") auf Grund der Lorentz-Kraft ausdrücken als

$$\frac{dE_{mat}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{\vec{x}_a \in V} \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^{\,2} \overset{\text{Newton}}{=} \sum_{\vec{x}_a \in V} \vec{v}_a \cdot \vec{F}_{a L}$$

$$= \sum_{\vec{x}_a \in V} q_a \vec{v}_a \cdot \left[\vec{E}(\vec{x}_a) + \frac{\vec{v}_a}{c} \times \vec{B}(\vec{x}_a) \right] \qquad \Big| \quad \vec{v}_a \cdot (\vec{v}_a \times \vec{B}) = 0$$

$$= \sum_{\vec{x}_a \in V} q_a \vec{v}_a \cdot \vec{E}(\vec{x}_a)$$

D.h., $\quad \int_V d^3\vec{x} \; \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{dE_{mat}}{dt} \quad !$

Jetzt also: $\quad \frac{\partial e_{em}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{S} \qquad \Big| \quad \int_V d^3\vec{x} \; ; \quad E_{em} := \int_V d^3\vec{x} \, e_{em}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(E_{em} + E_{mat}\right) \underset{\text{Gauß}}{=} - \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{S}$$

$$\frac{dE_{em}}{dt} = - \frac{dE_{mat}}{dt} - \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{S}.$$

Interpretation: Die Energie E_{em} der elektromagnetischen Felder kann sich dadurch ändern, dass Energie auf die geladenen Teilchen übertragen wird, oder dass elektromagnetiche Energie die Oberfläche passiert. D.h., die Interpretation auf Seite 91 ist vernünftig.

——— ∘ ———

Beispiel: ebene Welle (Seite 90).

Wir betrachten eine sogenannte linear polarisierte Welle, wobei $\vec{\lambda} := i|\vec{k}_0|\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}_0)$ ein reeller Vektor ist.

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\lambda}\, e^{-i\omega t + i\vec{k}_0\cdot\vec{x}}\right]$$

$$= \vec{\lambda}\cos(-\omega t + \vec{k}_0\cdot\vec{x}) \quad ; \qquad \omega := c|\vec{k}_0|$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{n}\times\vec{\lambda}\, e^{-i\omega t + i\vec{k}_0\cdot\vec{x}}\right] \quad ; \qquad \vec{n} := \frac{\vec{k}_0}{|\vec{k}_0|}$$

$$= \vec{n}\times\vec{\lambda}\cos(-\omega t + \vec{k}_0\cdot\vec{x})$$

Notabene: wegen $\vec{n}\cdot\vec{\lambda} = 0$ (vgl. Seite 90) gilt $|\vec{n}\times\vec{\lambda}| = |\vec{n}||\vec{\lambda}| = |\vec{\lambda}|$.

Energiedichte:
$$e_{em} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$
$$= \frac{1}{4\pi}|\vec{\lambda}|^2\cos^2(-\omega t + \vec{k}_0\cdot\vec{x}).$$

„Zeitgemittelte Energiedichte":
$$\langle e_{em}\rangle = \frac{1}{8\pi}|\vec{\lambda}|^2.$$

Energiestromdichte:
$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$$
$$= \frac{c}{4\pi}\underbrace{\vec{\lambda}\times(\vec{n}\times\vec{\lambda})}_{\text{Seite 74 / Blatt 10: } (\vec{\lambda}\cdot\vec{\lambda})\vec{n} - \overbrace{(\vec{\lambda}\cdot\vec{n})}^{0}\vec{\lambda}}\cos^2(-\omega t + \vec{k}_0\cdot\vec{x})$$
$$= \frac{c}{4\pi}|\vec{\lambda}|^2\,\vec{n}\cos^2(-\omega t + \vec{k}_0\cdot\vec{x})$$

„Zeitgemittelte Energiestromdichte":
$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{8\pi}|\vec{\lambda}|^2\vec{n} = \langle e_{em}\rangle\, c\cdot\vec{n}.$$

Vergleich mit Stromdichte bzw. Ladungsdichte (Seite 55):
$$\vec{j} = \rho\,\vec{v}$$

$\Rightarrow$ eine ebene Welle transportiert Energie mit Lichtgeschwindigkeit c in Richtung $\vec{n} = \frac{\vec{k}_0}{|\vec{k}_0|}$.

Neben Energiedichte und Energiestromdichte kann man auch die Impulsdichte und „Impulsstromdichte" des elektromagnetischen Feldes definieren. Ohne Herleitung*:

Konvention!

$$\frac{\partial g^i_{em}}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T^{ij}_{em}}{\partial x^j} = - f^i_L \quad , \quad i = 1,2,3$$

$$\vec{g}_{em} := \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{B} = \text{Impulsdichte}$$

$$T^{ij}_{em} := \frac{1}{4\pi} \left(E^i E^j + B^i B^j \right) - \frac{\delta^{ij}}{8\pi} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) = \text{„Impulsstromdichte"}$$

= Stromdichte der i-Komponente des Impulses in Richtung $\vec{e}_j$

= „Spannungstensor".

$$\vec{f}_L = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} = \text{Lorentzkraftdichte} \quad (\text{Seite } 57)$$

= Zeitableitung der Impulsdichte der „Materie" bzw. geladenen Teilchen.

(Eine besondere Eigenschaft:

$$e_{em} + \sum_{i=1}^{3} T^{ii}_{em} = \frac{1}{8\pi} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{3} \left(E^i E^i + B^i B^i \right) - \frac{1}{8\pi} \left(\sum_{i=1}^{3} \delta^{ii} \right) \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) \left(1 + 2 - 3 \right) = 0 .$$
)

---

* Skizze der Herleitung: Ersetze ρ und $\vec{j}$ in $\vec{f}_L$ mittels MI und MII:

$$\rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{1}{4\pi c} \underbrace{\dot{\vec{E}} \times \vec{B}}_{\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \to \text{MIII}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \underbrace{\left[(\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \right]}_{\sum_i \vec{e}_i \left[(\partial_j E^j) E^i - \varepsilon^{ikl} E^k \varepsilon^{lmn} \partial_m E^n \right] = \sum_i \vec{e}_i \left[E^i \partial_j E^j - E^j \partial_i E^j + E^j \partial_j E^i \right]} + \frac{1}{4\pi} \underbrace{\left[(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \right]}_{\sum_i \vec{e}_i \left[\varepsilon^{ikl} \varepsilon^{kmn} (\partial_m B^n) B^l \right] = \sum_i \vec{e}_i \left[B^j \partial_j B^i - B^j \partial_i B^j \right]} - \partial_t \vec{g}_{em}$$

$$\xrightarrow{\text{MIV}} \sum_i \vec{e}_i \, \partial_j T^{ij}_{em} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{f}_L = \sum_i \vec{e}_i \partial_j T^{ij}_{em} - \partial_t \vec{g}_{em} \qquad \square .$$