7.2 Elektromagnetische Wellen

Wellengleichungen im Vakuum $(\rho = 0, \vec{j} = 0)$, mit $\underbrace{\Box}_{\text{„Box"}} := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$:

(i) mit Potentialen (Seite 85):

$$\begin{cases} \Box \phi = 0 \\ \Box \vec{A} = 0 \\ \frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A} = 0 & \} \text{ Lorenz - Eichbedingung} \\ \Box \chi = 0 & \} \text{ noch existierende Freiheit} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \\ \phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi} \end{cases}$$

Es gibt also vier Felder $(\phi, \vec{A})$ mit zwei zusätzlichen Gleichungen, d.h. zwei unabhängige „Freiheitsgrade".

(ii) mit Feldern (Seite 86):

$$\begin{cases} \Box \vec{B} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \dot{\vec{E}} = c\,\nabla\times\vec{B} \end{cases}$$

(auch andere Wahlen sind möglich)

Hier haben wir drei Felder $(\vec{B})$ mit einer zusätzlichen Gleichung, d.h. zwei unabhängige Freiheitsgrade. $\vec{E}$ folgt von $\vec{B}$!

Ebene Wellen

Wir betrachten zuerst die Wellengleichung für eine reelle Funktion f (z.B. $f = \phi$), und nehmen außerdem an, dass die Lösung nur von $z = x^3$ abhängig sei. Die Welle ist dann konstant bzgl. x^1, x^2, d.h. eine Ebene.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) f = 0$$

Neue Variablen: $\xi := ct - z \quad , \quad \eta := ct + z$

$$t = \frac{1}{2c}(\xi + \eta) \quad , \quad z = \frac{1}{2}(\eta - \xi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial t}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Mit den neuen Variablen bekommt die Wellengleichung die Form

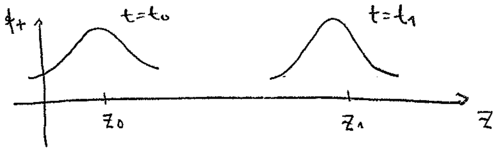
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0 .$$

Allgemeine Lösung:

$$f = f_+(\xi) + f_-(\eta)$$
$$= f_+(ct - z) + f_-(ct + z),$$

mit beliebigen Funktionen f_+ und f_-.

<u>Physikalische Interpretation</u>: f_+ hat für alle Raumzeitpunkte (t, z) mit $z = ct +$ Konstante denselben Wert:



$z_1 - z_0 = c(t_1 - t_0)$

D.h., f_+ beschreibt eine Welle, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit c in positive z-Richtung ausbreitet.

f_- hat für alle Raumzeitpunkte mit $z = -ct +$ Konstante denselben Wert, und beschreibt eine Welle, die sich mit c in negative z-Richtung ausbreitet.

Die allgemeine Lösung ist Superposition von rechts- und linkslaufenden Wellen.

<u>Der allgemeine Fall</u>

Die allgemeine Lösung von $\Box f = 0$ kann am besten mit Hilfe von <u>Fourier-Transformationen</u> dargestellt werden. (vgl. z.B. EMTP II)

In drei Dimensionen:

$$\boxed{\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \, \tilde{f}(\vec{k}) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ \tilde{f}(\vec{k}) &= \int d^3\vec{x} \, f(\vec{x}) \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ \int d^3\vec{x} \, e^{i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}} &= (2\pi)^3 \, \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q}) \end{aligned}}$$

.

Auch zu bemerken:

$$\boxed{\nabla e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \, i k^i \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i\vec{k} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}$$

Jetzt also: $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) f(\vec{x},t) = 0 \quad \Big| \quad f(\vec{x},t) = \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\tilde{f}(\vec{k},t)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

$$\underset{\nabla e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\Rightarrow} \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{f}(\vec{k},t)}{\partial t^2} + \vec{k}^2\tilde{f}(\vec{k},t)\right]e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 0 \quad \Big| \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

$$\Rightarrow \int d^3k \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial t^2} + \vec{k}^2\tilde{f}\right]\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q}) = 0 \qquad \forall\, \vec{q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2\tilde{f}(\vec{q},t)}{\partial t^2} + \omega_{\vec{q}}^2\,\tilde{f}(\vec{q},t) = 0 \quad , \quad \text{mit } \omega_{\vec{q}} := c|\vec{q}|.$$

Genau die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators! (Seite 39 u.a.)

Allgemeine Lösung:

$$\tilde{f}(\vec{q},t) = \tilde{f}_+(\vec{q})\,e^{-i\omega_{\vec{q}}t} + \tilde{f}_-(\vec{q})\,e^{i\omega_{\vec{q}}t}.$$

Wir müssen außerdem darauf beachten, dass $f(\vec{x},t)$ <u>reell</u> ist.

$$f(\vec{x},t) = \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\tilde{f}(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = f^*(\vec{x},t) = \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\tilde{f}^*(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad \Big| \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\vec{q},t) = \tilde{f}^*(-\vec{q},t) \qquad \forall\, \vec{q}.$$

Insbesondere:

$$\tilde{f}_+(\vec{q})e^{-i\omega_{\vec{q}}t} + \tilde{f}_-(\vec{q})e^{i\omega_{\vec{q}}t} = \tilde{f}_+^*(-\vec{q})e^{i\omega_{\vec{q}}t} + \tilde{f}_-^*(-\vec{q})e^{-i\omega_{\vec{q}}t}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_-(\vec{q}) = \tilde{f}_+^*(-\vec{q}) \qquad \forall\, \vec{q}.$$

Damit kann die allgemeine Lösung als

$$f(\vec{x},t) = \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[\tilde{f}_+(\vec{k})e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + \tilde{f}_-(\vec{k})e^{i\omega_{\vec{k}}t}\right]e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[\tilde{f}_+(\vec{k})e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \tilde{f}_-(-\vec{k})\,e^{i\omega_{\vec{k}}t-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

Substitution $\vec{k}\to-\vec{k}$ im zweiten Teil

$\tilde{f}_-(-\vec{k}) = \tilde{f}_+^*(\vec{k})$

$$\underset{\uparrow}{=} \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[\tilde{f}_+(\vec{k})e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \tilde{f}_+^*(\vec{k})\,e^{i\omega_{\vec{k}}t-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,a(\vec{k})\,e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

geschrieben werden, wobei $a(\vec{k}) := 2\tilde{f}_+(\vec{k})$.

($a(\vec{k})$ kann durch Anfangsbedingungen, d.h. $f(\vec{x},0) = \mathrm{Re}\left[\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}a(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$,

$\partial_t f(\vec{x},0) = \partial_t \frac{1}{2}\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[a(\vec{k})e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{k})e^{i\omega_{\vec{k}}t-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]_{t=0} = \mathrm{Im}\left[\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{k}}\,a(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$,

bestimmt werden.)

Lösungen für die elektrischen und magnetischen Felder

* Wellengleichungen: $\begin{cases} \Box \phi = 0 \\ \Box \vec{A} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \phi = \mathrm{Re}\left[\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, a(\vec{k})\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \\ \vec{A} = \mathrm{Re}\left[\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \vec{b}(\vec{k})\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \end{array}$

* Noch existierende Freiheit: $\Box \chi = 0 \Rightarrow \chi = \mathrm{Re}\left[\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, d(\vec{k})\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$

Wähle jetzt $d(\vec{k}) := i\,\frac{c\,a(\vec{k})}{\omega_{\vec{k}}}$.

Dann ist $\phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi} = \mathrm{Re}\left[\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left\{ a(\vec{k}) + i\,\frac{c\,a(\vec{k})}{\omega_{\vec{k}}}\cdot\frac{1}{c}\, i\omega_{\vec{k}} \right\} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] = 0\,!$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi = \mathrm{Re}\left[\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \underbrace{\left\{ \vec{b}(\vec{k}) + i\,\frac{c\,a(\vec{k})}{\omega_{\vec{k}}}\, i\vec{k} \right\}}_{\vec{b}(\vec{k}) - a(\vec{k})\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \;=:\; \vec{\varepsilon}(\vec{k})} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

Polarisations-Vektor

* Lorenz-Eichbedingung: $\nabla\cdot\vec{A}' = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left[\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \vec{\varepsilon}(\vec{k})\cdot i\vec{k}\; e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] = 0 .$$

Kann erfüllt werden, falls $\vec{\varepsilon}(\vec{k}) \perp \vec{k} \;\; \forall\, \vec{k}$, d.h. $\boxed{\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}(\vec{k}) = 0}$

D.h. Licht (bzw. elektromagnetische Welle) ist transversal polarisiert bzgl. der Bewegungsrichtung (gegeben von $\vec{k}$).

* Die entsprechenden elektrischen und magnetischen Felder:

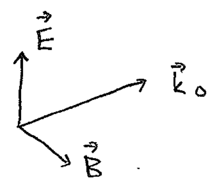
$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}' = \mathrm{Re}\left[\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \frac{i\omega_{\vec{k}}}{c}\, \vec{\varepsilon}(\vec{k})\; e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}' = \mathrm{Re}\left[\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, i\vec{k}\times\vec{\varepsilon}(\vec{k})\; e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

* Falls $\vec{\varepsilon}(\vec{k})$ nur für einen Wert von $\vec{k}$ ungleich null ist, d.h. $\vec{\varepsilon}(\vec{k}) \propto \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}_0)$, ist die Welle eben, weil sie nur in einer Richtung (der von $\vec{k}_0$) vom Ort abhängt, und monochromatisch, weil sie nur eine bestimmte Kreisfrequenz $\omega_{\vec{k}_0}$ enthält.

In diesem Fall, d.h. $\begin{cases} \vec{E} \propto \mathrm{Re}\left[i|\vec{k}_0|\, \vec{\varepsilon}(\vec{k}_0)\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \right] \\ \vec{B} \propto \mathrm{Re}\left[i\,\vec{k}_0\times\vec{\varepsilon}(\vec{k}_0)\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \right] \end{cases}$

gilt: $\vec{k}_0\cdot\vec{E} = 0$, $\vec{k}_0\cdot\vec{B} = 0$, $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$, $|\vec{E}| = |\vec{B}|$



— o —