7. Zeitabhängige Elektrodynamik

Maxwell-Gleichungen (Seite 56):

$$\left\{\begin{array}{rl} \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\varrho & \text{(M I)} \\ \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} & \text{(M II)} \\ \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 & \text{(M III)} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 & \text{(M IV)} \end{array}\right.$$

7.1 Grundgesetze, elektrodynamische Potentiale, Eichinvarianz

Es gibt jetzt zwei neue Terme, die in der Elektrostatik und Magnetostatik keine Rolle gespielt haben:

$$\text{(M II)} \Rightarrow \quad \nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\Big(\underbrace{\vec{j}}_{\text{in der Magnetostatik}} + \frac{\dot{\vec{E}}}{4\pi}\Big)$$

„Verschiebungsstrom", von Maxwell gefunden aus Forderung nach Konsistenz mit $\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$ (vgl. Seite 57).

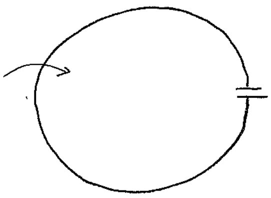
Der neue Term spielt eine entscheidende Rolle im Zusammenhang mit elektromagnetischen Wellen.

$$\text{(M III)} \Rightarrow \quad \nabla\times\vec{E} = \underbrace{0}_{\text{in der Elektrostatik}} - \frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$$

Faradaysches Induktionsgesetz

Der neue Term spielt eine entscheidende Rolle für die Stromerzeugung:

Fläche F



$$\text{Spannung } U := \oint d\vec{x}\cdot\vec{E}$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} \int_F d\vec{f}\cdot\nabla\times\vec{E}$$

$$\overset{\text{Faraday}}{=} -\frac{1}{c}\int_F d\vec{f}\cdot\dot{\vec{B}}$$

$$\overset{F \text{ zeitunabhängig}}{=} -\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi_m}{dt},$$

wobei $\Phi_m := \int_F d\vec{f}\cdot\vec{B}$ der magnetische Fluss durch die Drahtschleife ist (vgl. Seite 59).

Um die Maxwell-Gleichungen zu lösen gibt es wieder zwei Wege: durch Potentiale (i) bzw. direkt mit Feldern (ii).

(i) $\boxed{\begin{array}{r} \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \end{array}}$

* $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ ist wie in der Magnetostatik (Seite 71)

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}}}\,, \qquad \vec{A} = \text{Vektorpotential}.$$

Dieses $\vec{A}$ ist aber nicht eindeutig, sondern auch $\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi}$, mit einer beliebigen Funktion $\chi(\vec{x},t)$, liefert dieselbe magnetische Induktion $\vec{B}$.

* $$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \qquad \Big|\ \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\times\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\right) = 0$$

Wie in der Elektrostatik (Seite 59), aber mit $\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$ statt $\vec{E}$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} = -\nabla\phi\,, \qquad \phi = \text{Skalarpotential}$$

$$\underline{\underline{\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}}}$$

Was passiert in einer „Eichtransformation", $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$?
Die Funktion χ kann auch zeitabhängig sein; das elektrische Feld $\vec{E}$ muss aber unverändert bleiben.

Behauptung: Wir müssen ϕ als $\boxed{\phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi}}$ transformieren.

Beweis:
$$\vec{E}' = -\nabla\phi' - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}'$$
$$= -\nabla\phi + \cancel{\frac{1}{c}\nabla\dot{\chi}} - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} - \cancel{\frac{1}{c}\nabla\dot{\chi}} = \vec{E} \qquad \square.$$

<u>Beispiel</u>: $\vec{E}$ = Konstante, $\vec{B} = 0$ kann man durch

(a) $\phi = -\vec{x}\cdot\vec{E}\,, \quad \vec{A} = 0$

(b) $\phi' = 0\,, \quad \vec{A}' = -ct\,\vec{E}$

darstellen. Die Eichfunktion dazwischen:

$$\chi = -ct\,\vec{x}\cdot\vec{E}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{aligned}}$$

Einsatz von $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$, $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$:

$$\begin{cases} -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\nabla\cdot\dot{\vec{A}} = 4\pi\rho \\ \underbrace{\nabla\times(\nabla\times\vec{A})}_{\text{Seite 71: } \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}} + \frac{1}{c}\nabla\dot{\phi} + \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A}\right) = -4\pi\rho \\ \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \nabla\left(\frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$$

Wir können wieder die Eichfreiheit benutzen, um diese zu vereinfachen!
Eine Möglichkeit:

$$\frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A} = 0$$

„Lorenz- Eichbedingung"
1829-1891 ; nicht Lorentz!

Dann bekommen wir Wellengleichungen:

$$\begin{cases} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -4\pi\rho \\ \underbrace{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}_{-\Box \text{ bzw. „d'Alembert-Operator"}}\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$$

Die Lorenz- Eichbedingung fixiert aber die Eichung nicht vollständig!

$$\begin{cases} \phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi} \\ \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \end{cases} \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{c}\dot{\phi}' + \nabla\cdot\vec{A}'}_{\equiv 0} = \underbrace{\frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\vec{A}}_{\equiv 0} + \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi$$

Die Gleichung $-\Box\chi = 0$ hat endliche nichttriviale Lösungen,
z. B. $\chi(\vec{x},t) = f(x^1 - ct)$ mit einer beliebigen Funktion f :

$$-\Box f = \left(\frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f = f'' - f'' = 0 \quad !$$

(Eine zweite Möglichkeit:

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0$$

Coulomb - Eichbedingung (Seite 71)

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2\phi = -4\pi\rho \\ \Box\vec{A} = +\frac{4\pi}{c}\vec{j} - \frac{1}{c}\nabla\dot{\phi} \end{cases}$$

Diese Eichung ist besonders geeignet für den Fall $\rho = 0$ ($\Rightarrow \phi = 0$).)

— o —

(ii) Direkt mit Feldern:

$$\text{MII}: \quad \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \Big|\ \nabla\times$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\nabla\times(\nabla\times\vec{B})}_{\substack{\text{Seite 72:}\\ \nabla(\nabla\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B}\\ \text{MIV}\ \longrightarrow\ \nabla\cdot\vec{B}=0}} - \frac{1}{c}\underbrace{\nabla\times\dot{\vec{E}}}_{} = \frac{4\pi}{c}\nabla\times\vec{j}$$

$$\text{MIII}: \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} \qquad \Big|\ \partial_t$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\times\dot{\vec{E}} = -\frac{1}{c}\ddot{\vec{B}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Box\vec{B} = +\frac{4\pi}{c}\nabla\times\vec{j}}$$

$$\text{MIII}: \quad \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \qquad \Big|\ \nabla\times$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\nabla\times(\nabla\times\vec{E})}_{\substack{\nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}\\ \text{MI}\ \longrightarrow\ \nabla\cdot\vec{E}=4\pi\rho}} + \frac{1}{c}\underbrace{\nabla\times\dot{\vec{B}}}_{} = 0$$

$$\text{MII}: \quad \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \Big|\ \partial_t$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\times\dot{\vec{B}} = \frac{1}{c}\ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c}\dot{\vec{j}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Box\vec{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\dot{\vec{j}} - 4\pi\nabla\rho}$$

Insbesondere: für $\rho = \vec{j} = 0$, d.h. im Vakuum, bekommen wir

$$\boxed{\begin{aligned}\Box\vec{B} &= 0\\ \Box\vec{E} &= 0\end{aligned}}$$

Und, wie schon auf Seite 85 erwähnt, es gibt nichttriviale endliche Lösungen, „Wellen". ⇒ Kapitel 7.2.

— ∘ —

(Bemerkung: Maxwell-Gleichungen im Vakuum, d.h.

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 0\\ \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = 0\\ \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0\\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \end{cases},$$

sind invariant unter $\vec{E}\to\vec{B}$, $\vec{B}\to-\vec{E}$.
Diese Invarianz wird „Dualität" genannt.

— ∘ —)